Master 2 Année 2016-2017

Examen final de Typage

Documents autorisés : deux feuilles deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles.

Rédiger l'exercice 1 sur une feuille indépendante

Exercice 1 [Unification] *On remarque d'abord qu'un problème d'unification ayant l'une des formes suivantes n'a pas de solution.*

- $f(s_1, \ldots, s_n) \doteq g(t_1, \ldots, t_m)$ *avec* $f \neq g$
- $\alpha \doteq s$ *avec* $\alpha \in Var(s)$

On rajoute aussi une constante $\perp$ *à l'ensemble de systèmes d'équations en forme résolue pour représenter les problèmes qui n'ont pas de solution.*

1. *Rajouter à l'ensemble de règles de transformations vu en cours des règles d'échec.*
2. *Reformuler l'algorithme d'unification.*
3. *Reformuler (sans démontrer) les théorèmes de correction et complétude de l'unification.*
4. *Appliquer l'ensemble de nouvelles règles aux deux problèmes suivants :*

$$\begin{aligned} E_1 = \{f(a, g(Z, Y)) &\doteq f(X, g(f(a, X), g(Z, X)))\} \\ E_2 = \{f(g(h(X), f(a, b)), g(Z, Y)) &\doteq f(g(h(b), Z), h(a, Z))\} \end{aligned}$$

Que constatez vous par rapport aux règles de transformation vues en cours? Quel système préférez vous? Justifier.

Rédiger l'exercice 2 sur une feuille indépendante

Exercice 2 [Arbres de dérivations] *Considérez le langage*

$$M, N \ ::= \ x \mid \lambda x.M \mid MN$$

1. *Donnez un terme* M *qui ne peut pas être typé dans le système des types simples (non récursifs), et expliquez informellement pourquoi ce terme ne peut pas être typé.*

2. *Soit* $\mathcal{Y} = \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$. *Donnez un arbre de dérivation pour typer le terme* $\mathcal{Y}$ *en utilisant les types intersections*

$$A, B ::= int \mid A \to A \mid A \wedge A \mid \omega$$

et les règles de typage vues en cours.

3. *Donnez un arbre de dérivation pour typer le terme* $\mathcal{Y}$ *en utilisant les types récursives*

$$A, B ::= int \mid A \to A \mid t \mid rec\, t.A$$

et les règles de typage vues en cours. Montrez aussi que les conditions de bord nécessaires pour appliquer les règles sont vérifiées.

Rédiger l'exercice 3 sur une feuille indépendante

Exercice 3 [Définitions par induction] *Considérez la fonction depth, qui est définie par induction comme suit:*

$$depth(A) = \begin{cases} 1 + depth(A'\{^A/_t\}) & si\ A = rec\, t.A' \\ 0 & si\ A\ n'a\ pas\ un\ top\text{-}most\ rec\ -.- \end{cases}$$

1. *Définissez*
   - *des règles d'inférence ayant comme conclusion un couple de la forme* (A, n) *(*A *étant un type et* n *un entier), et telle que pour chaque* A *contractif et chaque* $n \in \mathbb{N}$, $depth(A) = n$ *ssi le couple* (A, n) *est dérivable avec vos règles.*
   - *une fonction* F *telle que pour chaque* A *contractif et chaque* $n \in \mathbb{N}$, $depth(A) = n$ *ssi* $\exists i$ *tel que* $(A, n) \in F^i(\emptyset)$.
2. *Montrez que si* A *n'est pas contractif alors* $depth(A)$ *peut diverger.*
3. *Soit* $\mathcal{Y} = \lambda y.(\lambda x.y(xx))(\lambda x.y(xx))$. *Définissez une fonction* g *telle que* $\mathcal{Y}g$ *se comporte comme depth (i.e. si* $depth(A) = n$ *alors* $\mathcal{Y}gA$ *s'évalue sur* n*).*

   Soit $A = rec\, t_1.rec\, t_2.rec\, t_3.(rec\, t.int \to t_3)$. *Montrez concrètement comment la fonction* $\mathcal{Y}g$ *se comporte comme depth sur le type* A.