Contrôle continu – Modélisation et spécification
Master Informatique

7 novembre 2019

Durée : 1h50.

Documents autorisés : Une feuille A4 manuscrite recto-verso.
Rendez deux copies. Une avec les exercices 1 et 2 et l'autre avec les exercices 3 et 4.

Exercice 1 : (2 points) *Analyse de systèmes de transitions*

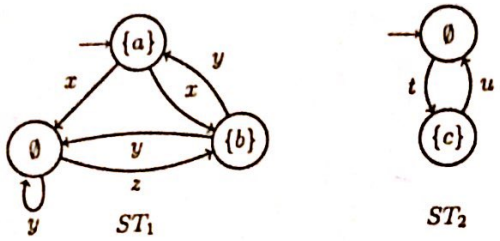


FIGURE 1 – Systèmes de transitions étiquetés ST_1 et ST_2

1. On considère les systèmes de transitions ST_1 et ST_2 donnés à la Figure 1. Dessinez le système de transitions $(ST_1||ST_2)_T$ où T est la table de synchronisation suivante (Act_1 sont les actions de ST_1 et Act_2 les actions de ST_2) :

Act_1	Act_2	
x	–	α
y	t	β
z	u	γ

2. On considère les systèmes de transitions ST_3, ST_4 et ST_5 de la Figure 2. Donnez la table de synchronisation T' telle que $(ST_3||ST_4)_{T'}$ est égal à ST_5.

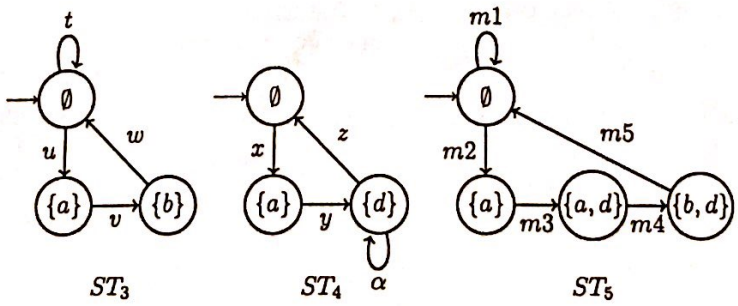


FIGURE 2 – Systèmes de transitions étiquetés ST_3, ST_4 et ST_5

Exercice 2 : (8 points) *Exclusion mutuelle par message synchronisant*

On considère un système avec trois processus P1,P2 et P3 qui peuvent s'échanger des messages synchronisant. Chaque processus a trois états, un état initial, un état où il est en section critique et un état où il sait qu'un autre processus est en section critique et il attend que celui-ci sorte pour revenir dans l'état initial. Depuis son état initial, un processus peut aller en section critique et il envoie alors un message reçu par les deux autres processus qui vont en état d'attente et depuis sa section critique il peut revenir dans l'état initial, et il envoie de nouveau un message reçu par les deux autres processus qui reviennent eux aussi dans leur état initial. Les actions que vous pourrez utiliser dans votre modélisation sont ainsi :

— E1 : P1 rentre en section critique,

— S1 : P1 sort de sa section critique,
— E2 : P2 rentre en section critique,
— S2 : P2 sort de sa section critique,
— E3 : P3 rentre en section critique,
— S3 : P3 sort de sa section critique.

Le but de cet exercice est de proposer un modèle pour ce système en utilisant les systèmes de transitions.

1. Donnez les systèmes de transitions S_{P1}, S_{P2} et S_{P3} modélisant le comportement des processus P1, P2 et P3.
2. Donnez la table de synchronisation du système global.
3. Exprimez en LTL (en rajoutant des propositions atomiques à votre système) :
   (a) Il n'y a jamais deux processus en section critique.
   (b) P1 est infiniment souvent en section critique.
4. Votre système vérifie-t-il la dernière propriété ? Justifez votre réponse.

Pour améliorer le système global, on décide de rajouter un contrôleur qui empêche qu'un processus rentre deux fois de suite en section critique (c'est à dire que pour rentrer de nouveau en section critique il doit attendre qu'au moins un autre processus y soit rentré).

5. Donnez le système de transitions S_c correspondant au contrôleur (les systèmes S_{P1}, S_{P2} et S_{P3} restant les mêmes).
6. Donnez la table de synchronisation du nouveau système global.
7. Dans ce système, a-t-on que P1 est infiniment souvent en section critique ? Justifiez votre réponse.

Rappel : Syntaxe et sémantique de LTL. La syntaxe des formules de LTL est définie par la grammaire suivante : $\phi ::= P \mid \phi \vee \psi \mid \phi \wedge \psi \mid \neg\phi \mid \mathbf{X}\phi \mid \phi\,\mathbf{U}\,\psi \mid \mathbf{X}^{-1}\phi \mid \phi\,\mathbf{S}\,\psi$ où P appartient à un ensemble de propositions atomiques AP. Ces formules s'interprètent à une position $i \geq 0$ le long d'une exécution ρ d'un STE : $\rho(i)$ est le i-ème état et $\ell(\rho(i))$ est l'ensemble des propositions vraies en $\rho(i)$.
La sémantique est définie par :

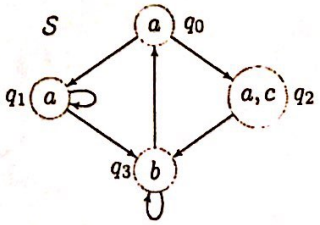
— $\rho, i \models P$ ssi $P \in \ell(\rho(i))$
— $\rho, i \models \mathbf{X}\phi$ ssi $\rho, i+1 \models \phi$
— $\rho, i \models \phi\,\mathbf{U}\,\psi$ ssi $\exists j \geq i$ t.q. $(\rho, j \models \psi) \wedge (\forall k \in [i, j[$, on a : $\rho, k \models \phi\ )$
— $\rho, i \models \mathbf{X}^{-1}\phi$ ssi $i > 0$ et $\rho, i-1 \models \phi$
— $\rho, i \models \phi\,\mathbf{S}\,\psi$ ssi $\exists j \leq i$ t.q. $(\rho, j \models \psi) \wedge (\forall k \in]j, i]$, on a : $\rho, k \models \phi\ )$

On utilise aussi les abréviations $\mathbf{F}$ (pour $\top\,\mathbf{U}\,\_$), $\mathbf{G}$ (pour $\neg\mathbf{F}\neg$), $\mathbf{F}^{-1}$ (pour $\top\,\mathbf{S}\,\_$), $\mathbf{G}^{-1}$ (pour $\neg\mathbf{F}^{-1}\neg$), et $\mathbf{W}$ (défini par : $a\,\mathbf{W}\,b = (a\,\mathbf{U}\,b) \vee (\mathbf{G}a)$).

Sémantique de LTL

Exercice 3 : (6 points)

1. On considère le STE $\mathcal{S}$ de la figure ci-contre (q_0 est l'état initial). Pour chacune des formules suivantes, dire si la formule est vraie pour $\mathcal{S}$ (*ie* pour toutes ses exécutions). Justifier les réponses.



$a\,\mathbf{U}\,b$ $\quad a\,\mathbf{W}\,b$ $\quad \neg(a\,\mathbf{U}\,b)$ $\quad \mathbf{G}\,\mathbf{F}\,b$ $\quad \mathbf{G}(a \vee b)$
$(\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,b) \Rightarrow (\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,c)$ $\quad (\mathbf{F}\mathbf{G}a) \vee (\mathbf{F}\mathbf{G}b)$ $\quad (\mathbf{F}\mathbf{G}\neg a) \Rightarrow (a\,\mathbf{U}\,b)$
$(\mathbf{F}\,c) \Rightarrow (a\,\mathbf{U}\,b)$ $\quad (\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,c) \Rightarrow (\mathbf{G}\,\mathbf{F}\,b)$

2. Comparer les formules ci-dessous :

$\mathbf{F}(a \wedge b) \stackrel{?}{\equiv} (\mathbf{F}a) \wedge (\mathbf{F}b)$ $\quad \mathbf{G}(a \wedge b) \stackrel{?}{\equiv} (\mathbf{G}a) \wedge (\mathbf{G}b)$ $\quad a\mathbf{U}b \stackrel{?}{\equiv} \mathbf{G}a \wedge \mathbf{F}b$ $\quad \mathbf{F}a \wedge \mathbf{F}b \stackrel{?}{\equiv} \mathbf{F}(a \wedge \mathbf{F}b) \vee \mathbf{F}(b \wedge \mathbf{F}a)$

$\mathbf{GF}(a \vee b) \stackrel{?}{\equiv} (\mathbf{GF}a) \vee (\mathbf{GF}b)$ $\quad a\,\mathbf{U}\,(b \wedge \mathbf{X}c) \stackrel{?}{\equiv} a\,\mathbf{U}\,(c \wedge \mathbf{X}^{-1}b)$

Ecrire des formules LTL

Exercice 4 : (4 points)

Ecrire en logique temporelle, les propriétés suivantes utilisant des propositions atomiques a et b :

1. La proposition a n'est jamais vraie.
2. La proposition a est vraie au moins une fois.
3. La proposition a est vraie infiniment souvent.
4. La proposition a est vraie exactement une fois.
5. Tout a est suivi (un jour) par un b.
5. La proposition a est vraie exactement deux fois.
6. Les propositions a et b sont vraies en alternance : a est vraie, puis b, puis a,...
7. Si la proposition a est vraie infiniment souvent, alors la proposition b est toujours vraie.