Partiel de Sémantique des langages de programmation

Exercice 1 *Considérons les trois λ -termes suivants :*

$$S = \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz) \qquad K = \lambda x. \lambda y. x \qquad I = \lambda x. x$$

1. Montrez que $I =_{\beta} SKK$.
2. Donnez, si possible, une dérivation de typage pour I .
3. Donnez, si possible, une dérivation de typage pour K .
4. Donnez, si possible, une dérivation de typage pour S .
5. Le terme $SII(SII)$ admet-il une forme normale?
6. Donnez, si possible, une dérivation de typage pour $SII(SII)$.

Exercice 2 *Soit $_{\circ}$ la fonction sur les λ -termes définie comme suit:*

$$\begin{aligned} x^{\circ} &= x \\ (\lambda x. t)^{\circ} &= \lambda x. t^{\circ} \\ (tu)^{\circ} &= t^{\circ}u^{\circ} \quad \text{si } t^{\circ} \text{ n'est pas une abstraction} \\ (tu)^{\circ} &= v\{x/u^{\circ}\} \quad \text{si } t^{\circ} = \lambda x. v \end{aligned}$$

Soient t et u deux λ -termes quelconques. Montrer les propriétés suivantes:

1. $t^{\circ}u^{\circ} \rightarrow_{\beta}^* (tu)^{\circ}$.
2. $t^{\circ}\{x/u^{\circ}\} \rightarrow_{\beta}^* t\{x/u\}^{\circ}$.
3. $t \rightarrow_{\beta}^* t^{\circ}$.

Exercice 3 *On considère l'alphabet $\Sigma = \{1/0, \rightarrow /2, \times /2\}$ sur lequel on se donne un ensemble $\mathcal{E}$ contenant sept équations :*

$$\begin{array}{ll} x \times y \doteq y \times x & x \rightarrow 1 \doteq 1 \\ x \times (y \times z) \doteq (x \times y) \times z & 1 \rightarrow x \doteq x \\ (x \times y) \rightarrow z \doteq x \rightarrow (y \rightarrow z) & x \times 1 \doteq x \\ x \rightarrow (y \times z) \doteq (x \rightarrow y) \times (x \rightarrow z) & \end{array}$$

1. Prouvez que $\mathcal{E} \vdash x \rightarrow (y \rightarrow z) \doteq y \rightarrow (x \rightarrow z)$.
2. Prouvez que $\mathcal{E} \vdash (x \times y) \rightarrow (z \times w) \doteq (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \times (y \rightarrow (x \rightarrow w))$.
3. Prouvez que $\mathcal{E} \vdash e \doteq 1$ pour tout terme clos e .