## Sémantique - Master Informatique - Examen 2018-2019 - Session 1

**Consignes.** Durée 3h00. Tout document ou dispositif électronique est interdit, toute réponse doit être justifiée et le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1 (réduction)** (3 points) *La relation de réduction $\to_\eta$ sur les $\lambda$-termes est définie par :*

$$\to_\eta = \{(C[\lambda x.Mx], C[M]) \mid C \text{ contexte}, M \text{ terme}, x \notin \mathsf{fv}(M)\} .$$

*Proposez une preuve du fait que la relation $\to_\eta$ est confluente.*

**Exercice 2 (un $\lambda$-calcul avec *cast*)** (6 points) *On définit un $\lambda$-calcul typé avec* cast *(un opérateur qui permet de forcer le type d'un terme). Les types $A, B, \ldots$ sont les types propositionnels ordinaires, les termes $M, N, \ldots$ sont les $\lambda$-termes ordinaires plus les nombres entiers $n \in \mathbf{Z}$ plus les* casts *d'un terme $(A)M$, les valeurs $V, V', \ldots$ sont soit les entiers soit les abstractions :*

$$\begin{array}{ll} A ::= o \mid (A \to A) & \textit{(types)} \\ M ::= id \mid (\lambda id.M) \mid (MM) \mid n \mid (A)M & \textit{(termes)} \\ V ::= n \mid \lambda id.M & \textit{(valeurs)} \end{array}$$

*Les contextes d'évaluation $E, E', \ldots$ sont ceux de l'appel par valeur modulo le fait qu'on évalue sous un* cast. *Les règles de réduction (R1–3) s'appliquent à des termes clos.*

$$E ::= [\,] \mid EM \mid VE \mid (A)E \quad \textit{(contextes d'évaluation)}$$

$$\begin{array}{lcll} E[(\lambda x.M)V] & \to & E[[V/x]M] & \textit{(R1)} \\ E[(o)n] & \to & E[n] & \textit{(R2)} \\ E[(A \to B)(\lambda x.M)] & \to & E[\lambda x.((\lambda x.(B)M)((A)x))] & \textit{(R3)} \end{array}$$

*Par exemple, si $M \equiv \lambda f.f3$ alors $(o \to o)M$ réduit à $\lambda f.((\lambda f.(o)(f3))((o)f))$ alors que $(o)M$ ne réduit pas. On appelle* redex *un $\lambda$-terme qui a une des formes suivantes : $(\lambda x.M)V$, $(o)n$ ou $(A \to B)(\lambda x.M)$. Pour typer les $\lambda$-termes, on fait au plus simple en étendant le système propositionnel à la Curry avec une règle pour le* cast *et une règle pour les entiers :*

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma \vdash (A)M : A} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash n : o}$$

*Pour les propriétés suivantes, proposez soit une preuve soit un contre-exemple.*

1. *La fonction d'effacement du cast $\mathcal{E}$ est définie par : $\mathcal{E}((A)M) = \mathcal{E}(M)$, $\mathcal{E}(n) = n$, $\mathcal{E}(x) = x$, $\mathcal{E}(\lambda x.M) = \lambda x.\mathcal{E}(M)$ et $\mathcal{E}(MN) = \mathcal{E}(M)\mathcal{E}(N)$. Assertion : il est possible de typer un terme clos $M$ tel que $\mathcal{E}(M) \equiv \omega\omega$, avec $\omega \equiv \lambda x.xx$.*
2. *Si un terme clos est typable et ne réduit pas alors il a une des formes suivantes : $V$, $E[(o)(\lambda x.M)]$ ou $E[(A \to B)(n)]$, où $V$ est une valeur et $E$ est un contexte d'évaluation. En d'autre termes, si la réduction est bloquée alors soit on a une valeur soit on cherche à évaluer le* cast *d'une fonction vers un entier ou d'un entier vers une fonction.*
3. *Le typage est préservé par réduction des termes clos. A savoir : si $\vdash M : A$ est dérivable et $M \to N$ alors $\vdash N : A$ est dérivable.*

**Exercice 3 (co-induction)** (7 points) *Soit* $\Sigma$ *un* alphabet *(un ensemble non-vide) avec éléments génériques* $a, b, c, \ldots$ *Un mot infini (dénombrable !) sur* $\Sigma$ *est une fonction des nombres naturels* $\mathbf{N}$ *dans* $\Sigma$. *On dénote par* $\Sigma^{\mathbf{N}}$ *l'ensemble des mots infinis. On utilise la notation usuelle pour représenter les mots dans laquelle le symbole* $\cdot$ *dénote la concaténation et ce symbole peut être omis. Ainsi on pourra écrire* $\alpha = aba\beta$ *pour un mot infini* $\alpha$ *tel que* $\alpha(0) = \alpha(2) = a$, $\alpha(1) = b$ *et* $\alpha(n+3) = \beta(n)$ *pour tout* $n \geq 0$. *Si* $\alpha$ *est un mot fini non vide alors* $\alpha^\omega$ *est le mot infini* $\alpha \cdot \alpha \cdots$ *qui est obtenu par concaténation de* $\alpha$ *un nombre dénombrable de fois. Ainsi si* $\alpha = ab$ *alors* $\alpha^\omega$ *est le mot* $ababa \cdots$ *Aussi on écrit* $\alpha = \beta\gamma$ *pour signifier que le mot* $\alpha$ *peut se voir comme la concaténation d'un mot* $\beta$ *avec un mot* $\gamma$. *Par exemple,* $(ab)^\omega = \beta\gamma$ *avec* $\beta = aba$ *et* $\gamma = b(ab)^\omega$.

*On dénote par* $R, S, \ldots$ *des relations ternaires sur les mots infinis. En particulier on écrit* $R(\alpha, \beta, \gamma)$ *si* $(\alpha, \beta, \gamma) \in R$. *On dit qu'une telle relation* $R$ *est* admissible *si :*

$$R(\alpha, \beta, a\gamma) \text{ implique } \quad (\ \alpha = a\alpha' \text{ et } R(\alpha', \beta, \gamma)\ ) \text{ ou } (\ \beta = a\beta' \text{ et } R(\alpha, \beta', \gamma)\ )\ .$$

*On définit :*

$$\begin{array}{ll} S_0 & = \Sigma^{\mathbf{N}} \times \Sigma^{\mathbf{N}} \times \Sigma^{\mathbf{N}}, \\ S_{n+1} & = \{(\alpha, \beta, a\gamma) \mid \quad (\ \alpha = a\alpha' \text{ et } S_n(\alpha', \beta, \gamma)\ ) \text{ ou } (\ \beta = a\beta' \text{ et } S_n(\alpha, \beta', \gamma)\ )\ \}\ , \\ S_\omega & = \cap_{n \geq 0} S_n\ . \end{array}$$

1. *Définissez une fonction* $\mathcal{F}$ *telle que pour toute relation ternaire* $R \subseteq S_0$ *on a que* $R$ *est admissible ssi* $R \subseteq \mathcal{F}(R)$.
2. *Montrez qu'il existe une plus grande relation admissible qu'on dénote par Shuffle (intuitivement,* $Shuffle(\alpha, \beta, \gamma)$ *signifie que* $\gamma$ *est obtenu par un mélange de* $\alpha$ *et* $\beta$*).*
3. *Montrez que* $Shuffle \subseteq S_\omega$.
4. *Prouvez ou donnez un contre-exemple à la propriété :* $Shuffle = S_\omega$.
5. *Prouvez ou donnez un contre-exemple aux propriétés suivantes : (i)* $Shuffle(a^\omega, b^\omega, (ab)^\omega)$, *(ii)* $Shuffle((ab)^\omega, a^\omega, (abb)^\omega)$, *(iii)* $Shuffle(a^\omega, b^\omega, a^\omega)$.

**Exercice 4 (traduction CPS)** (4 points) *En cours, on a étudié la traduction CPS :*

$$\underline{x} = \lambda k.kx \quad \underline{\lambda x.M} = \lambda k.k(\lambda x.\underline{M}) \quad \underline{MN} = \lambda k.\underline{M}(\lambda m.\underline{N}(\lambda n.mnk))\ .$$

*Soit* $I \equiv \lambda x.x$ *et considérez la variante suivante :*

$$\langle x \rangle = \lambda k.xk \quad \langle \lambda x.M \rangle = \lambda k.k(\lambda x.\langle M \rangle) \quad \langle MN \rangle = \lambda k.\langle M \rangle(\lambda m.m\langle N \rangle k)\ .$$

1. *Peut-on trouver un* $\lambda$*-terme clos* $M$ *tel que l'évaluation par nom de* $\langle M \rangle I$ *diffère de l'évaluation par valeur de* $\langle M \rangle I$ *?*
2. *Trouvez un* $\lambda$*-terme* $M$ *clos tel que : (i) L'évaluation de* $M$ *en appel par nom termine, (ii) l'évaluation de* $M$ *en appel par valeur boucle, (iii) l'évaluation de* $\underline{M}I$ *en appel par valeur boucle, et (iv) l'évaluation de* $\langle M \rangle I$ *en appel par valeur termine.*
3. *On suppose un système de typage propositionnel standard à la Curry pour les* $\lambda$*-termes. Proposez une traduction des types* $\langle A \rangle$ *telle que si* $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$ *est dérivable alors* $x_1 : \langle A_1 \rangle, \ldots, x_n : \langle A_n \rangle \vdash \langle M \rangle : \langle A \rangle$ *est dérivable (en d'autres termes la traduction CPS préserve le typage).* Suggestion : *on peut prendre* $\langle A \rangle = \neg\neg\underline{A}$ *où la traduction* $\underline{A}$ *et la négation '*$\neg$*' d'un type restent à définir. . .*

## Solutions

Ceci est juste une trace de la solution en particulier certaines preuves très similaires à celles disponibles dans les notes de cours sont omises. Il est entendu que dans la copie d'examen on s'attend à voir un peu plus de détails sur ces preuves.

Solution de l'exercice 1 (3 points)

La règle $\eta$ diminue la taille du terme et donc elle termine. Par le lemme de Newman pour montrer sa confluence il suffit de montrer sa confluence locale. Un $\eta$-redex est un terme de la forme $\lambda x.Mx$ avec $x \notin \mathsf{fv}(M)$. Supposons qu'un terme contient deux $\eta$-redex distincts. S'ils sont disjoints la confluence est 'automatique'. Sinon, il faut que l'un soit contenu dans l'autre. Si le $\eta$-redex ci-dessus est le redex extérieur alors on doit avoir $M \equiv C[\lambda y.Ny]$ avec $C$ contexte et $y \notin \mathsf{fv}(N)$. Ainsi on a (en omettant le contexte du redex extérieur) : $\lambda x.Mx \to C[\lambda y.Ny]$ et $\lambda x.Mx \to \lambda x.C[N]x$ et on peut clore le diagramme avec les $\eta$-réductions : $C[\lambda y.Ny] \to C[N]$ et $\lambda x.C[N]x \to C[N]$.

Solution de l'exercice 2

1. (1,5 points) Vrai. Par exemple, on peut prendre $M \equiv PN$, $A = (o \to o)$, $P \equiv (A \to A)(\lambda x.((A)x)x)$, $N \equiv (A)(\lambda x.((A)x)x)$. On déduit que $\vdash \lambda x.((A)x)x : A$ de (i) $x : o \vdash (A)x : A$ et (ii) $x : o \vdash x : o$ (qui est un axiome). Et on dérive (i) de (ii).
2. (2,5 points) Vrai. Soit $\Phi ::= (o)\lambda x.M \mid (A \to B)n$. On montre que si $\vdash M : A$ et $M$ ne réduit pas alors soit $M$ est une valeur soit ils existent uniques $E$ contexte d'évaluation par valeur et $\Phi$ tels que $M \equiv E[\Phi]$. On procède par récurrence sur le typage de $M$. Supposons que $M$ n'est pas une valeur. Alors on a deux possibilités :

   $M \equiv M_1M_2$ On doit pouvoir dériver : $\vdash M_1 : A \to B$ et $\vdash M_2 : A$.
   - Si $M_1$ n'est pas une valeur alors il ne peut pas réduire et par hypothèse de récurrence on a $M_1 \equiv E'[\Phi]$. Donc : $M \equiv E'M_2[\Phi]$.
   - Si $M_1$ est une valeur alors elle doit être une fonction (par typage) et $M_2$ ne peut pas être une valeur sinon $M$ réduit. Par ailleurs, $M_2$ ne peut pas réduire non plus. Donc par hypothèse de récurrence $M_2 \equiv E'[\Phi]$. Donc : $M \equiv M_1E'[\Phi]$.

   $M \equiv (A)N$ On doit pouvoir dériver : $\vdash N : B$.
   - Si $N$ est une valeur comme $M$ ne réduit pas on doit avoir $N \equiv [\Phi]$, pour un certain $\Phi$. Donc : $M \equiv (A)[\Phi]$.
   - Si $N$ n'est pas une valeur alors il ne peut pas réduire et par hypothèse de récurrence on a $N \equiv E'[\Phi]$. Donc : $M \equiv (A)E'[\Phi]$.
3. (2 points) Faux. En reprenant l'exemple de l'énonce : $M \equiv \lambda f.f3$. On dérive $\vdash (o \to o)M : o \to o$ mais on ne dérive pas $\vdash \lambda f.(\lambda f.(o)(f3))((o)f) : o \to o$. En effet, si on cherche une preuve on tombe sur $f : o \vdash \lambda f.(o)(f3)$ qui force $f : o \vdash (o)(f3) : o$ qui à son tour force $f : o \vdash f3 : A$ qui n'est pas dérivable pour n'importe quel $A$.

Solution de l'exercice 3

1. (1 point) On pose :

$$\mathcal{F}(R) = \{(\alpha, \beta, a\gamma) \mid (\ \alpha = a\alpha' \text{ et } R(\alpha', \beta, \gamma)\ ) \text{ ou } (\ \beta = a\beta' \text{ et } R(\alpha, \beta', \gamma)\ )\}\ .$$

   et on observe au passage que $\mathcal{F}$ est monotone.

2. (1 point) Par le théorème de Tarsky, l'ensemble $\bigcup\{R \mid R \subseteq \mathcal{F}(R)\}$ est le plus grand point fixe de $\mathcal{F}$ et la plus grande relation admissible.
3. (1 point) On montre par récurrence sur $n$ que *Shuffle* $\subseteq S_n$. Il suit que *Shuffle* $\subseteq S_\omega$.
4. (2,5 points) Vrai. Pour déduire $S_\omega \subseteq$ *Shuffle* on observe que $S_\omega$ est admissible. Supposons $S_\omega(\alpha, \beta, a\gamma)$. Ceci veut dire que $\forall\, n < \omega \;\; S_n(\alpha, \beta, a\gamma)$. Ce qui implique :

$$\forall\, n < \omega \;\; (\alpha = a\alpha' \text{ et } S_n(\alpha', \beta, \gamma)) \text{ ou } (\beta = a\beta' \text{ et } S_n(\alpha, \beta', \gamma)) \;.$$

   La branche gauche ou droite de la disjonction doivent être satisfaites par une infinité de $n$ (premier point clef de la preuve). Par exemple, supposons que c'est la branche gauche qui est satisfaite infiniment souvent. Comme la séquence est monotone (deuxième point clef de la preuve) $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$, on peut conclure que :

$$\forall\, n < \omega \;\; (\alpha = a\alpha' \text{ and } S_n(\alpha', \beta, \gamma)) \;.$$

   C'est à dire : $(\alpha = a\alpha' \text{ and } S_\omega(\alpha', \beta, \gamma))$. Donc $S_\omega$ est admissible.
5. (1,5 points) Les réponse à $(i)$ et $(iii)$ sont positives. Par exemple, on prouve que :

$$R = \{(a^\omega, b^\omega, \gamma) \mid \gamma \in \{a, b\}^\omega\}$$

   est admissible. En effet si $R(a^\omega, b^\omega, c\gamma)$ alors $c = a$ on a $a^\omega = aa^\omega$ et $R(a^\omega, b^\omega, \gamma)$. Et on raisonne de façon similaire si $c = b$. D'autre part la réponse à $(ii)$ est négative. Il suffit de vérifier que $\neg S_3((ab)^\omega, a^\omega, (abb)^\omega)$.

Solution de l'exercice 4

1. (1 point) L'image des deux traductions CPS est dans le fragment suivant du $\lambda$-calcul :

$$\begin{array}{l} V ::= id \mid \lambda id.P \\ P ::= V \mid PV \end{array}$$

   Comme remarqué en cours, dans ce fragment l'argument d'un $\beta$-redex est toujours une valeur et le fragment est stable par substitution d'une valeur pour une variable. Ainsi il n'y a pas de différence entre l'évaluation par nom ou par valeur sur un $\lambda$-terme $P$ généré par la grammaire ci-dessus.
2. (1 point) Par exemple, on peut prendre $M \equiv (\lambda x.I)\Omega$ avec $I \equiv \lambda y.y$, $\Omega \equiv \omega\omega$ et $\omega \equiv \lambda x.xx$.
3. (2 points) On peut définir :

$$\neg A = (A \to o), \quad \underline{o} = o, \quad \underline{A \to B} = \neg\neg\underline{A} \to \neg\neg\underline{B}, \quad \langle A \rangle = \neg\neg\underline{A} \;,$$

   et vérifier par récurrence sur la dérivation de $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : B$ qu'on peut construire une dérivation de $x_1 : \langle A_1 \rangle, \ldots, x_n : \langle A_n \rangle \vdash \langle M \rangle : \langle B \rangle$.