Sémantique - Master Informatique - Examen 2017-2018 - Session 1

Consignes. Durée 3h00. Tout document ou dispositif électronique est interdit. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (report de la règle η) *On rappelle que la η règle de réduction dans le λ-calcul correspond à la relation :*

$$\to_\eta = \{(C[\lambda x.Mx], C[M]) \mid C \text{ contexte}, M \text{ terme}, x \notin \mathsf{fv}(M)\}$$

On écrit aussi $\to_\beta$ pour la β réduction et $\to_{\beta\eta} = \to_\beta \cup \to_\eta$. Si $\to_R$ est une relation binaire alors $\stackrel{*}{\to}_R$ est sa clôture réflexive et transitive.

Fait *Si $M \to_\eta N \stackrel{*}{\to}_\beta P$ alors il existe Q tel que $M \stackrel{*}{\to}_\beta Q \stackrel{*}{\to}_\eta P$.*

En utilisant ce fait, démontrez les propriétés suivantes.

1. (1,5 points) *Si $M \stackrel{*}{\to}_\eta N \stackrel{*}{\to}_\beta P$ alors il existe Q tel que $M \stackrel{*}{\to}_\beta Q \stackrel{*}{\to}_\eta P$.*
2. (1,5 points) *Si $M \stackrel{*}{\to}_{\beta\eta} P$ alors il existe Q tel que $M \stackrel{*}{\to}_\beta Q \stackrel{*}{\to}_\eta P$.*
3. (1,5 points) *Si M est en $\to_\beta$ forme normale et $M \to_\eta N$ alors N est en $\to_\beta$ forme normale.*
4. (1,5 points) *Si M a une forme normale par rapport à la réduction $\to_\beta$ alors M a une forme normale par rapport à la réduction $\to_{\beta\eta}$.*

Exercice 2 (co-induction, pre-ordre contextuel et simulation) *On considère le λ-calcul avec appel par nom dont les règles de réduction à petits pas sur les λ-termes clos sont les suivantes :*

$$\frac{M \to M'}{MN \to M'N} \qquad \frac{}{(\lambda x.M)N \to [N/x]M}\ .$$

On écrit aussi $M \Downarrow N$ si $M \stackrel{*}{\to} N$ et N ne réduit pas. Soit X le plus grand ensemble de λ-termes clos qui satisfait la condition :

si $M \in X$ alors ($\exists N\ (M \to N)$ et $\forall N\ (M \to N$ implique $N \in X)$).

Question 1. (1 point) *Expliquez pourquoi un tel ensemble existe.*

Question 2. (1 point) *Donnez un exemple de λ-terme qui est dans l'ensemble et un exemple de λ-terme qui n'y est pas.*

Question 3. (1 point) *Supposons maintenant qu'on considère le* plus petit ensemble *X de λ-termes qui satisfait la condition ci-dessus. Pouvez vous trouver un λ-terme qui est dans le plus grand ensemble mais pas dans le plus petit ?*

Rappel. *Le pre-ordre contextuel est défini sur les λ-termes* ouverts *par : $M \leq_C N$ si pour tout contexte C fermant $C[M] \Downarrow$ implique $C[N] \Downarrow$.*

Question 4. (4 points) *Un numéral de Church* $\underline{n}$ *est un* λ*-terme de la forme* $\lambda f.\lambda x.f(\cdots(fx)\cdots)$ *où l'application de* f *est itérée* n *fois. Montrez que pour* $n \neq m$ *on a :* $\underline{n} \not\leq_C \underline{m}$.

Rappel. $\leq_S$ *est la plus grande relation binaire* S *sur les* λ*-termes clos telle que si* $(M, N) \in S$ *alors (1)* $M \Downarrow$ *implique* $N \Downarrow$ *et (2) pour tout* P *clos,* $(MP, NP) \in S$*. Si* M, N *sont des* λ*-termes ouverts alors on écrit* $M \leq_S N$ *si pour toute substitution fermante* σ *on a :* $\sigma M \leq_S \sigma N$*. On sait que* $\leq_S$ *coïncide avec le pre-ordre contextuel* $\leq_C$*.*

Question 5. (2 points) *Montrez que* $M \leq_C \lambda x.Mx$ *si* $x \notin \mathsf{fv}(M)$ *(*M *peut être ouvert).*

Exercice 3 (transformation CPS) *On considère la transformation CPS suivante sur les* λ*-termes :*

$$\underline{x} = \lambda k.kx \qquad \underline{\lambda x.M} = \lambda k.k(\lambda x.\underline{M}) \qquad \underline{MN} = \lambda k.\underline{M}(\lambda m.\underline{N}(\lambda n.mnk))$$

Soient $A, B, \ldots$ *types simples avec les règles de typage à la Curry suivantes :*

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

Pour une variable de type fixée r*, on pose* $\neg A = A \to r$ *et on définit une transformation CPS sur les types de la façon suivante :*

$$\underline{t} = t \qquad \underline{A \to B} = \underline{A} \to \neg\neg\underline{B}$$

Question 1. (2,5 points) *Dans quel sens peut-on dire que la transformation par continuation préserve le typage ? (1.1) Formulez la propriété, (1.2) expliquez comment la propriété s'applique au jugement :* $x : t_1 \vdash \lambda f.fx : (t_1 \to t_2) \to t_2$*, et (1.3) donnez une stratégie pour la prouver.*

On ajoute au λ*-calcul les couples et les projections avec les règles de réduction :*

$$C[\pi_i\langle M_1, M_2\rangle] \to C[M_i] \qquad i = 1, 2$$

et les règles de typage associées :

$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : A_1 \quad \Gamma \vdash M_2 : A_2}{\Gamma \vdash \langle M_1, M_2\rangle : A_1 \times A_2} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_1(M) : A_1} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_2(M) : A_2}$$

Question 2. (2,5 points) *Etendez la transformation CPS à couples, projections et types produits. Votre extension devrait toujours préserver le typage dans le sens de la question 1. Aussi le* λ*-terme transformé devrait simuler le* λ*-terme d'origine. Par exemple, vous devriez avoir :* $\underline{(\pi_1\langle x, y\rangle)}(\lambda z.z) \xrightarrow{*} x$*.*

Solutions

Solution de l'exercice 1

1. Par récurrence sur le nombre de η réductions :

$$M \to_\eta M_1 \to_\eta \cdots \to_\eta M_{n-1} \to_\eta M_n \xrightarrow{*}_\beta N$$

Si $n = 1$ on sait qu'il existe P tel que $M \xrightarrow{*}_\beta P \xrightarrow{*}_\eta N$. Si $n > 1$ on sait qu'il existe P tel que $M_{n-1} \xrightarrow{*}_\beta P \xrightarrow{*}_\eta N$. Par ailleurs par récurrence sur n, on sait qu'il existe P' tel que $M \xrightarrow{*}_\beta P' \xrightarrow{*}_\eta P$. Comme $\xrightarrow{*}_\eta$ est transitive on a :

$$M \xrightarrow{*}_\beta P' \xrightarrow{*}_\eta N\ .$$

2. Par récurrence sur le nombre d'alternances de règles β et η. Supposons :

$$M_1 \xrightarrow{+}_\eta N_1 \xrightarrow{+}_\beta M_2 \cdots M_n \xrightarrow{+}_\eta N_n \xrightarrow{+}_\beta M_{n+1}$$

Si $n = 1$ on applique le point (1). Si $n > 1$, par (1) on sait qu'il existe P tel que $M_n \xrightarrow{*}_\beta P \xrightarrow{*}_\eta M_{n+1}$ et par récurrence sur n et la transitivité de $\xrightarrow{*}_\beta$ on sait qu'il existe P' tel que $M_1 \xrightarrow{*}_\beta P' \xrightarrow{*}_\eta P$.

3. Si M est en forme β-normale il doit avoir la forme $\lambda x_1, \ldots, x_n.(\cdot(xM_1)\cdots M_m)$ où les M_i sont en forme β-normale. Un η-redex dans M est un sous-terme de la forme $\lambda y.Ny$ avec $y \notin \mathsf{fv}(N)$. Si ce terme est un sous-terme de M_j par récurrence sur la taille de M on peut supposer qu'après sa réduction le residu de M_j est toujours en forme β-normale et donc M est en forme normale. Sinon on doit avoir $x_n = y$, $M_m = y$ et $N = xM_1 \cdots M_{m-1}$. Mais dans ce cas le reduit $\lambda x_1, \ldots, x_{n-1}.(\cdot(xM_1)\cdots M_{m-1})$ est encore un terme en forme β normale.

4. La η reduction termine car elle décroit toujours la taille du terme. Par ailleurs par (3) la η reduction ne va pas générer de β redex. A partir d'un terme en forme β normale pour générer sa forme $\beta\eta$ normale il suffit donc de reduire les η redex dans un ordre arbitraire.

Solution de l'exercice 2

Question 1. Soit $(2^{\Lambda_0}, \subseteq)$ les parties des λ-termes clos ordonnées par inclusion. Cet ordre partiel est un treillis complét et la fonction f suivante sur ce treillis est monotone :

$$f(X) = \{M \mid \exists N\ \ (M \to N) \text{ et } \forall N\ \ (M \to N \text{ implique } N \in X)\}\ .$$

La définition est équivalente à chercher le plus grand ensemble X de λ-termes clos qui satisfait $X \subseteq f(X)$. Par Tarsky, cet ensemble existe et correspond au plus grand point fixe (*gfp*) de f :

$$\mathit{gfp}(f) = \bigcup\{X \in 2^{\Lambda_0} \mid X \subseteq f(X)\}\ .$$

Question 2. Prénons $\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$. Pour montrer $\Omega \in gfp(f)$ il suffit de vérifier que :

$$\{\Omega\} \subseteq f(\{\Omega\})$$

En effet $\Omega \in f(\{\Omega\})$ car $\Omega \to \Omega$ et si $\Omega \to N$ alors $N \equiv \Omega$. D'autre part, si M est en forme normale alors $M \notin f(X)$ pour tout X. Il en suit que si $X \subseteq f(X)$ forcement $M \notin X$ et donc $M \notin gfp(f)$.

Question 3. On a :

$$f(\emptyset) = \{M \mid \exists N \;\; M \to N \text{ et } \forall N \;\; M \to N \text{ implique } N \in \emptyset\} \ ,$$

a savoir :

$$f(\emptyset) = \{M \mid \exists N \;\; M \to N \text{ et } \forall N \;\; M \not\to N\} = \emptyset \ .$$

Comme le plus petit point fixe (lfp) s'exprime par :

$$\bigcap \{X \in 2^{\Lambda_0} \mid f(X) \subseteq X\} \ ,$$

il en suit que $lfp(f) = \emptyset$. Donc, par exemple, $\Omega \in gfp(f) \backslash lfp(f)$.

Question 4. Soit $K = \lambda x, y.x$ et $n < m$. On propose deux contextes (d'autres solutions sont possibles). D'abord on considère le contexte suivant :

$$C = [\;] K \Omega Q_1 \cdots Q_n$$

Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \underline{n} K \Omega Q_1 \cdots Q_n & \stackrel{*}{\to} & (K^n \Omega) Q_1 \cdots Q_n \\ & \stackrel{*}{\to} & \Omega \not\Downarrow \ . \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \underline{m} K \Omega Q_1 \cdots Q_n & \stackrel{*}{\to} & (K^m \Omega) Q_1 \cdots Q_n \\ & \stackrel{*}{\to} & (K^{m-n} \Omega) \Downarrow \ . \end{array}$$

Donc $\underline{m} \not\leq_C \underline{n}$.

Ensuite on définit un deuxième contexte. Soient :

$$P_0 = \Omega \quad P_{i+1} = \lambda x.x P_i I \ .$$

On reconnaît ici une itération du constructeur de couple dans le λ-calcul. En itérant m fois on met le terme Ω a profondeur m. L'idée est maintenant d'itérer i fois la première projection sur P_m. Si $i = m$ on arrive à Ω mais si $i = n < m$ on arrive à un λ-terme qui converge. Soit $F \equiv \lambda x.xK$ et $C \equiv [\;] F P_m$. On a :

$$\underline{n} F P_m \stackrel{*}{\to} F^n P_m \ .$$

On observe :

$$\begin{array}{l} F^i P_j \stackrel{*}{\to} P_j K \cdots K \quad (K \ i\text{-fois}) \\ P_{i+1} K \stackrel{*}{\to} P_i \ . \end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{l} \underline{m} F P_m \stackrel{*}{\to} F^m P_m \stackrel{*}{\to} P_m K \cdots K \stackrel{*}{\to} P_0 \equiv \Omega \not\Downarrow \\ \underline{n} F P_m \stackrel{*}{\to} F^n P_m \stackrel{*}{\to} P_m K \cdots K \stackrel{*}{\to} P_{n-m} \Downarrow \end{array}$$

Donc $\underline{n} \not\leq_C \underline{m}$.

Question 5. On veut montrer $M \leq_C \lambda x.Mx$ si $x \notin \mathsf{fv}(M)$ (M peut être ouvert). On considère d'abord le cas où M est fermé. On montre que la relation suivante est une simulation :

$$S = \{(MP_1 \cdots P_n, (\lambda x.Mx)P_1 \cdots P_n) \mid n \geq 0, P_i \text{ clos}\} \ .$$

Donc la propriété est vraie si M est clos. S'il est ouvert, il faut montrer que pour toute substitution σ fermante :

$$\sigma M \leq_S \sigma(\lambda x.Mx) \equiv \lambda x.\sigma Mx \ .$$

Ce qui est vrai par la propriété montrée sur les termes clos.

Solution de l'exercice 3

Question 1.

(1.1) On définit $\underline{\Gamma, x : A} = \underline{\Gamma}, x : \underline{A}$ et on a la propriété :

Si $\Gamma \vdash M : A$ alors $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \neg\neg\underline{A}$.

(1.2) On a :

$$\begin{array}{ll}
\underline{\lambda f.fx} & = \lambda k.k(\lambda f.\underline{fx}) \\
\underline{fx} & = \lambda k.(\lambda k.kf)(\lambda m.(\lambda k.kx)(\lambda n.mnk)) \\
\underline{(t_1 \to t_2) \to t_2} & = (t_1 \to \neg\neg t_2) \to \neg\neg t_2
\end{array}$$

Le typage dérivé est :

$$x : t_1 \vdash \underline{\lambda f.fx} : \neg\neg\underline{(t_1 \to t_2) \to t_2} \ .$$

(1.3) La preuve est par récurrence sur la hauteur de la preuve de $\Gamma \vdash M : A$.

Question 2. On définit :

$$\begin{array}{ll}
\underline{\langle M, N \rangle} & = \lambda k.\underline{M}(\lambda m.\underline{N}(\lambda n.k\langle m, n\rangle)) \\
\underline{\pi_i M} & = \lambda k.\underline{M}(\lambda m.k(\pi_i m)) \\
\underline{A \times B} & = \underline{A} \times \underline{B}
\end{array}$$

En prénant l'exemple on a bien :

$$\begin{array}{l}
\underline{\pi_i(\langle x, y\rangle)}(\lambda z.z) \\
\equiv (\lambda k.\underline{\langle x, y\rangle}(\lambda m.k(\pi_1 m)))(\lambda z.z) \\
\to \underline{\langle x, y\rangle}(\lambda m.(\lambda z.z)(\pi_1 m))) \\
\equiv (\lambda k.\underline{x}(\lambda m.\underline{y}(\lambda n.k\langle m, n\rangle)))(\lambda m.(\lambda z.z)(\pi_1 m)) \\
\to \underline{x}(\lambda m.\underline{y}(\lambda n.(\lambda m.(\lambda z.z)(\pi_1 m))\langle m, n\rangle)) \\
\xrightarrow{*} \underline{y}(\lambda n.(\lambda m.(\lambda z.z)(\pi_1 m))\langle x, n\rangle)) \\
\xrightarrow{*} (\lambda m.(\lambda z.z)(\pi_1 m))\langle x, y\rangle)) \\
\xrightarrow{*} (\lambda z.z)(\pi_1\langle x, y\rangle) \\
\xrightarrow{*} x
\end{array}$$

La propriété de préservation du typage est toujours celle enoncée pour la question 1 et la preuve suit le même chemin.