Sémantique - Master Informatique - Examen 2016-2017 - Session 1

Consignes. Durée 2h30. Tout document ou dispositif électronique est interdit. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (8 points) *Pour simplifier le problème, on va considérer un 'λ-calcul sans λ' (SIC!) mais avec constructeurs de couple, projection, injection et sélecteur de cas. La syntaxe des termes est donc la suivante :*

$$\begin{array}{rll} M ::= & x \mid y \mid \ldots & \textit{(variables)} \\ & \mathsf{apl}(M,M) & \textit{(application)} \\ & \mathsf{pair}(M,M) & \textit{(couple)} \\ & \mathsf{pi1}(M) & \textit{(première projection)} \\ & \mathsf{pi2}(M) & \textit{(deuxième projection)} \\ & \mathsf{in1}(M) & \textit{(première injection)} \\ & \mathsf{in2}(M) & \textit{(deuxième injection)} \\ & \mathsf{case}(M,M,M) & \textit{(sélecteur de cas)} \end{array}$$

Les règles de réduction sont les suivantes où C est un contexte avec un trou dans le langage en question (notez que comme il n'y a pas de λ il n'y a pas de β règle non plus!) :

$$\begin{array}{rcl} C[\mathsf{pi1}(\mathsf{pair}(M_1,M_2))] & \to & C[M_1] \\ C[\mathsf{pi2}(\mathsf{pair}(M_1,M_2))] & \to & C[M_2] \\ C[\mathsf{case}(\mathsf{in1}(M),N_1,N_2)] & \to & C[\mathsf{apl}(N_1,M)] \\ C[\mathsf{case}(\mathsf{in2}(M),N_1,N_2)] & \to & C[\mathsf{apl}(N_2,M)] \end{array}$$

Montrez ou donnez un contre-exemple aux assertions suivantes.

1. *Le système de réduction termine.*
2. *Le système de réduction est confluent.*

On introduit maintenant un système de typage propositionnel où le types ont la syntaxe suivante :

$$\begin{array}{rll} A ::= & t \mid s \mid \ldots & \textit{(variables de type)} \\ & A \to A & \textit{(type fonctionnel)} \\ & A \times A & \textit{(type produit)} \\ & A + A & \textit{(type somme)} \end{array}$$

Un contexte de type Γ a la forme usuelle $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ et les règles de typage sont les suivantes (les règles pour pi2 *et* in2 *sont symétriques et elles sont omises) :*

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash \mathsf{apl}(M,N) : B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M_i : A_i \quad i = 1,2}{\Gamma \vdash \mathsf{pair}(M_1,M_2) : A_1 \times A_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \mathsf{pi1}(M) : A_1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A_1}{\Gamma \vdash \mathsf{in1}(M) : A_1 + A_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A_1 + A_2 \quad \Gamma \vdash N_i : A_i \to B \quad i = 1,2}{\Gamma \vdash \mathsf{case}(M,N_1,N_2) : B}$$

Montrez ou donnez un contre-exemple aux assertions suivants.

3. *Le typage est preservé par réduction : si $\Gamma \vdash M : A$ et $M \to N$ alors $\Gamma \vdash N : A$.*
4. *Le typage assure la terminaison : si $\Gamma \vdash M : A$ alors toute suite de réduction qui commence par M termine.*

Exercice 2 (6 points) *On se place dans le cadre de l'inférence de types simples dans un style à la Curry. On rappelle les règles :*

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \to B} \quad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

Soient $K \equiv \lambda x.\lambda y.x$ *et* $E \equiv \lambda x.\lambda y.\lambda w.Kw(\lambda f.\lambda p.p(fx)(fy))$. *Rappel : l'application associe à gauche et l'application a priorité sur l'abstraction.*

1. *Calculez le type principal du* λ*-terme* E.
2. *Soient* M_1 *et* M_2 *deux* λ*-termes avec types principaux* A_1 *et* A_2*, respectivement. Calculez le type principal du* λ*-terme :*

$$\lambda f.E(fM_1)M_2$$

   où $f \notin \mathsf{fv}(M_1 M_2)$.

Exercice 3 (6 points) *On considère le* λ*-calcul avec appel par nom dont les règles de réduction à petits pas sur les* λ*-termes clos sont les suivantes :*

$$\frac{M \to M'}{MN \to M'N} \qquad \frac{}{(\lambda x.M)N \to [N/x]M}\ .$$

On écrit aussi $M \Downarrow N$ *si* $M \xrightarrow{*} N$ *et* N *ne réduit pas. Le pre-ordre contextuel est défini sur les* λ*-termes* ouverts *par :* $M \leq_C N$ *si pour tout contexte* C *fermant* $C[M]\Downarrow$ *implique* $C[N]\Downarrow$. *D'autre part,* $\leq_S$ *est la plus grande relation binaire* S *sur les* λ*-termes clos telle que si* $(M, N) \in S$ *alors (1)* $M\Downarrow$ *implique* $N\Downarrow$ *et (2) pour tout* P *clos,* $(MP, NP) \in S$. *Si* M, N *sont des* λ*-termes ouverts alors on écrit* $M \leq_S N$ *si pour toute substitution fermante* σ *on a :* $\sigma M \leq_S \sigma N$. *On sait que* $\leq_S$ *coïncide avec le pre-ordre contextuel* $\leq_C$.

1. *Soit* $\leq_{IO}$ *une relation sur les* λ*-termes clos définie par :*

$$M \leq_{IO} N \text{ si } \forall P \text{ clos } MP\Downarrow \text{ implique } NP\Downarrow$$

   Montrez que $\leq_{IO}$ *n'est pas stable par contextes.*
2. *Soit* $\leq_{IO^*}$ *une autre relation sur les* λ*-termes clos définie par :*

$$M \leq_{IO^*} N \text{ si pour tout } n \geq 0,\ P_1, \ldots, P_n \text{ clos, } MP_1 \cdots P_n\Downarrow \text{ implique } NP_1 \cdots P_n\Downarrow.$$

   Montrez que $\leq_{IO^*}$ *coïncide avec* $\leq_S$.

Solutions

Solution de l'exercice 1 Toutes les assertions sont vraies.

1. Si M est un terme soit $|M|$ le nombre de noeuds dans sa représentation en tant que arbre. Il est immédiat de vérifier que si $M \to N$ alors $|M| > |N|$. Il suit que toute suite de réduction termine et en effet sa longueur est bornée par la taille du terme.
2. Comme le système termine il suffit de montrer la confluence locale (lemme de Newman). Il y a 4 règles et les seuls cas intéressants se présentent quand une règle en contient une autre. On liste les cas à considérer selon la règle extérieure :
   — $\mathsf{pi1}$. La règle interne peut être dans M_1 ou M_2. Si elle est dans M_1 soit M_1' le terme obtenu en réduisant la règle interne. On a :
   $$C[\mathsf{pi1}(\mathsf{pair}(M_1, M_2)))] \to C[M_1], \qquad C[\mathsf{pi1}(\mathsf{pair}(M_1', M_2)))] \to C[M_1']$$
   On peut donc clore le diagramme avec un pas de réduction de chaque côté. Si la règle interne est dans M_2 alors on a :
   $$C[\mathsf{pi1}(\mathsf{pair}(M_1, M_2)))] \to C[M_1], \qquad C[\mathsf{pi1}(\mathsf{pair}(M_1, M_2')))] \to C[M_1]$$
   et on peut clôre le diagramme avec 1 pas d'un côté et 0 pas dans l'autre.
   — $\mathsf{pi2}$. Cas symétrique du cas $\mathsf{pi1}$.
   — $\mathsf{in1}$. La règle interne peut être dans M, N_1 ou N_2 et les deux derniers cas sont symétriques. L'analyse est similaire à celle effectué pour $\mathsf{pi1}$
   — $\mathsf{in2}$. Cas symétrique du cas $\mathsf{in1}$.
   Conclusion : non seulement le système est localement confluent mais on peut montrer une propriété plus forte : si $M \to N_1, N_2$ alors il existe P tel que $N_i \to P$ ou $N_i = P$ pour $i = 1, 2$.
3. La preuve se fait par récurrence sur la hauteur de la preuve de $\Gamma \vdash M : A$, la taille du contexte C qui contient le redex et analyse des redex.
4. Le système termine déjà sans typage !

Solution de l'exercice 2

1. Le type principal du λ-terme E est $t \to (t \to (s \to s))$. Le fait que f est appliqué à x et y force l'égalité des types de x et y. D'autre part, puisque le type principal de K est $t \to s \to t$, le type de w doit être égal au type du résultat.
2. Le type principal du λ-terme $\lambda f.E(fM_1)M_2$, for $f \notin \mathsf{fv}(M_1M_2)$, est $(A_1 \to A_2) \to (s \to s)$. La fonction f s'applique au λ-terme M_1 et en se basant sur (1), le type du résultat de f doit être égal au type de M_2.

Solution de l'exercice 3

1. Par exemple, on prend :
   $$\begin{array}{ll} M & \equiv \lambda x.\lambda y.I \\ N & \equiv \lambda x.\lambda y.\Omega \\ C & = [\ ]I \end{array}$$
   On a :
   $$M \leq_{IO} N \text{ et } C[M] \not\leq_{IO} C[N] \ .$$
2. Comme $\leq_S$ coïncide avec $\leq_C$, on sait que : $M \leq_S N$ implique $M \leq_{IO^*} N$. La réciproque suit de l'observation que $\leq_{IO^*}$ est une simulation.