Partiel de *Sémantique des langages de programmation*
(Correction)

Exercice 1 [Confluence Abstraite] *Soient R et S deux systèmes de réduction t.q.*

(Hyp1) $\rightarrow_R$ *est confluent et SN.*

(Hyp2) $\rightarrow_S$ *possède la propriété du diamant:*

$$\begin{array}{llcl} \forall t,u,v & t & \rightarrow_S & u \\ & \downarrow_S & & \downarrow_S \\ \exists w & v & \rightarrow_S & w \end{array}$$

(Hyp3) *Le diagramme suivant est vrai*

$$\begin{array}{llcl} \forall t,u,v & t & \rightarrow_S & u \\ & \downarrow_R & & \downarrow *_R \\ \exists w & v & \rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^* & w \end{array}$$

1. *Montrer*

$$\begin{array}{llcl} \forall t,u,v & t & \rightarrow_S & u \\ & \downarrow *_R & & \downarrow *_R \\ \exists w & v & \rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^* & w \end{array}$$

Correction : Par induction sur $\rightarrow_R$ (qui est SN). Remarquons d'abord que l'hypothèse d'induction est de la forme:

$$\begin{array}{llcl} \forall s,u,v & s & \rightarrow_S & u \\ & \downarrow *_R & & \downarrow *_R \\ \exists w & v & \rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^* & w \end{array}$$

pour tout terme s plus petit que t par rapport à l'odre de l'induction, c'est à dire, pour tout terme s t.q. $t \rightarrow_R^+ s$. On raisonne par cas sur la séquence $t \rightarrow_R^* v$.

- *Si $t \rightarrow_R^* v$ en 0 pas, alors $t = v$ et*

$$\begin{array}{lcl} t & \rightarrow_S & u \\ = & & = \\ v & \rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^* & w \end{array}$$

- *Si $t \rightarrow_R^* v$ en au moins 1 pas, alors $t \rightarrow_R t' \rightarrow_R^* v$ et*

$$\begin{array}{ccccccc} t & & & \rightarrow_S & & & u \\ \downarrow_R & & & Hyp3 & & & \downarrow *_R \\ t' & \rightarrow_R^* & s & \rightarrow_S & & \rightarrow_R^* & u' \\ \downarrow *_R & Hyp1 & \downarrow *_R & HI & \downarrow *_R & Hyp1 & \downarrow *_R \\ v & \rightarrow_R^* & & \rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^* & & \rightarrow_R^* & w \end{array}$$

Remarquer qu'on peut utiliser l'HI sur s car $t \rightarrow_R^+ s$ et donc s est plus petit que t.

2. *Déduire la propriété du diamant pour $\rightarrow_R^* \rightarrow_S \rightarrow_R^*$.*
Correction : On raisonne par induction sur $\rightarrow_R$ (qui est SN).
Soit $t \rightarrow_R^* t_1 \rightarrow_S \rightarrow_R^* u$ et $t \rightarrow_R^* t_2 \rightarrow_S \rightarrow_R^* v$. On raisonne par cas sur $t \rightarrow_R^* t_1$ et $t \rightarrow_R^* t_2$.

- *Cas* $t = t_1$ *et* $t = t_2$.

$$\begin{array}{ccccc}
t & \to_S & & \to_R^* & u \\
 & & & & \downarrow *_R \\
\downarrow_S & Hyp2 & \downarrow_S & Point\ 1 & \downarrow_S \\
 & & & & \downarrow *_R \\
 & \to_S & & \to_R^* & \\
\downarrow *_R & Point\ 1 & \downarrow *_R & Hyp1 & \downarrow *_R \\
v & \to_R^* \to_S \to_R^* & & \to_R^* &
\end{array}$$

- *Cas* $t \neq t_1$ *ou* $t \neq t_2$. *Sans perte de generalite on suppose que* $t \to_R \to_R^* t_1$.

$$\begin{array}{ccccc}
t & \to_R & s & \to_R^* t_1 \to_S \to_R^* & u \\
\downarrow *_R & Hyp1 & \downarrow *_R & & \downarrow *_R \\
 & \to_R^* & & HI & \\
t_2 & & \downarrow *_R & & \downarrow_S \\
\downarrow_S & Point\ 1 & \downarrow_S & & \\
t_3 & \to_R^* & & & \\
\downarrow *_R & Hyp1 & \downarrow *_R & & \downarrow *_R \\
v & \to_R^* & & \to_R^* \to_S \to_R^* & w
\end{array}$$

Ramarque qu'on peut utiliser l'HI sur s *car* $t \to_R^+ s$ *et donc* s *est plus petit que* t.

Correction : Par le point 2 la relation a la propriété du diamant, donc par le cours on conclut.

Exercice 2 [Typage] *Soient* a_1, a_2, a_3, a_4 *des type de base. Pour chaque type* A_i *ci-dessous on cherche à construire un terme de type* A_i*. Plus précisément, pour chaque type* A_i *exhiber un contexte* Γ_i *et un terme* T_i *t.q* $\Gamma_i \vdash T_i : A_i$ *soit dérivable dans le système de types simples du lambda-calcul. Donner la dérivation de types complète sous forme d'arbre de typage.*

Rappel : la flèche associe à droite, donc $a \to b \to c$ *dénote le type* $a \to (b \to c)$.

1. $A_1 = (a_1 \to a_2) \to (a_2 \to a_3) \to (a_1 \to a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4) \to a_1 \to a_4$

   Aide : étant donné des paramètres f, g, h, x *étant (respectivement) de type* $a_1 \to a_2$, $a_2 \to a_3$, $a_1 \to a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4$ *et* a_1, *trouvez des constructions vous permettant d'obtenir des termes de type* a_2, a_3, $a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4$, $a_2 \to a_3 \to a_4$, $a_3 \to a_4$ *et* a_4.

   Correction :

   Soit $\Gamma = f : a_1 \to a_2, g : a_2 \to a_3, h : a_1 \to a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4, x : a_1$

$$\frac{\Gamma \vdash f : a_1 \to a_2 \qquad \Gamma \vdash x : a_1}{\Gamma \vdash f\ x : a_2}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash h : a_1 \to a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \qquad \Gamma \vdash x : a_1}{\Gamma \vdash h\ x : a_2 \to a_2 \to a_3 \to a_4} \qquad \Gamma \vdash f\ x : a_2}{\Gamma \vdash h\ x\ (f\ x) : a_2 \to a_3 \to a_4} \qquad \Gamma \vdash f\ x : a_2}{\Gamma \vdash h\ x\ (f\ x)\ (f\ x) : a_3 \to a_4} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g : a_2 \to a_3 \qquad \Gamma \vdash f\ x : a_2}{\Gamma \vdash g\ (f\ x) : a_3}}{\vdash \lambda f.\lambda g.\lambda h.\lambda x.h\ x\ (f\ x)\ (f\ x)\ (g\ (f\ x)) : A_1}$$

2. $A_2 = (a_1 \to a_2 \to a_3) \to (a_2 \to a_3 \to a_4) \to (a_1 \to a_2 \to a_4)$

   Correction :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash g : a_2 \to a_3 \to a_4 \quad \Gamma \vdash y : a_2}{\Gamma \vdash g\ y : a_3 \to a_4} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : a_1 \to a_2 \to a_3 \quad \Gamma \vdash x : a_1}{\Gamma \vdash f\ x : a_2 \to a_3} \quad \Gamma \vdash y : a_2}{\Gamma \vdash f\ x\ y : a_3}}{g\ y\ (f\ x\ y) : a_4}}{\lambda f.\lambda g.\lambda x.\lambda y.g\ y\ (f\ x\ y) : A_2}
$$

Exercice 3 [Expressivité] *Considérons les quatre λ-termes suivants:*

$\texttt{vrai} :=_{def} \lambda x \lambda y.x$ $\qquad$ $\texttt{faux} :=_{def} \lambda x \lambda y.y$

$\overline{\texttt{n}} :=_{def} \lambda x \lambda y. \underbrace{(x(x \ldots (x}_{\texttt{n}\ fois} y) \ldots))$ $\qquad$ $\texttt{if} :=_{def} \lambda x \lambda y \lambda z.(x\ y)\ z$

Puis considérons le λ-terme $\texttt{non} :=_{def} \lambda b.((\texttt{if}\ b)\ \texttt{faux})\ \texttt{vrai}$.

1. *Calculer la forme normale du λ-terme* non vrai *et celle de* non faux.

   Correction :

   $\texttt{non vrai} \to ((\texttt{if vrai})\ \texttt{faux})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{faux}$.

   $\texttt{non faux} \to ((\texttt{if faux})\ \texttt{faux})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{vrai}$.

2. *Calculer également les formes normales des λ-termes suivants:* $(\overline{0}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai}$, $(\overline{1}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai}$, $(\overline{2}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai}$, $(\overline{3}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai}$.

   Quelle est en génerale la forme normale de $(\overline{\texttt{n}}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai}$ *lorsque* n *est pair? Même question avec* n *impair.*

   Correction :

   $(\overline{0}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{vrai}$

   $(\overline{1}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{non vrai} \to^* \texttt{faux}$

   $(\overline{2}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{non}\ (\texttt{non vrai}) \to^* \texttt{non faux} \to^* \texttt{vrai}$.

   $(\overline{3}\ \texttt{non})\ \texttt{vrai} \to^* \texttt{non}\ (\texttt{non}\ (\texttt{non vrai})) \to^* \texttt{non vrai} \to^* \texttt{faux}$.

3. *Définir un λ-terme P qui implémente la fonction parité, c'est à dire, pour tout* $\texttt{n} \in \mathbb{N}$, $P\ \overline{\texttt{n}} \to_\beta^* \texttt{vrai}$ *si* n *est pair et* $P\ \overline{\texttt{n}} \to_\beta^* \texttt{faux}$ *si* n *est impair.*

   Correction :

   $P = \lambda n.\texttt{if}\ ((n\ \texttt{non})\ \texttt{vrai})\ \texttt{vrai}\ \texttt{faux}$.