Université Paris 7 - Master II - 1ère année 2008-2009

Partiel de *Sémantique des langages de programmation*
(Correction)

Exercice 1 *Considérons les λ-termes suivants*

$$\begin{array}{rcl} S & = & \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz) \\ K & = & \lambda x.\lambda y.x \\ I & = & \lambda x.x \end{array}$$

- *montrez que $I =_\beta SKK$*

  Correction : *Sont soulignés les redex réduits à chaque étape:*

  $$\underline{SKK} \to \lambda z.\underline{Kz(Kz)} \to \lambda z.z$$

- *donnez, si possible, une dérivation de typage pour I*

  Correction :

  $$\frac{x : \alpha \vdash_\lambda x : \alpha}{\vdash_\lambda \lambda x.x : \alpha \to \alpha}$$

- *donnez, si possible, une dérivation de typage pour K*

  Correction :

  $$\frac{\dfrac{x : \alpha, y : \beta \vdash_\lambda x : \alpha}{x : \alpha \vdash_\lambda \lambda y.x : \beta \to \alpha}}{\vdash_\lambda \lambda x.\lambda y.x : \alpha \to (\beta \to \alpha)}$$

- *donnez, si possible, une dérivation de typage pour S*

  Correction :

  $$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda x : \alpha \to (\beta \to \gamma) \quad x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda z : \alpha}{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda xz : \beta \to \gamma} \quad \dfrac{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda y : \alpha \to \beta \quad x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda z : \alpha}{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda yz : \beta}}{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, z : \alpha \vdash_\lambda xz(yz) : \gamma}}{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), y : \alpha \to \beta, \vdash_\lambda \lambda z.xz(yz) : \alpha \to \gamma}}{x : \alpha \to (\beta \to \gamma), \vdash_\lambda \lambda y.\lambda z.xz(yz) : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}}{\vdash_\lambda \lambda x.\lambda y.\lambda z.xz(yz) : (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)}$$

- *le terme $SII(SII)$ admet-il une forme normale?*

  Correction : *Non, il boucle: $SII(SII) \to_\beta^* I(SII)(I(SII))$ et ensuite, soit $\to_\beta (SII)(I(SII)) \to_\beta SII(SII)$, soit $\to_\beta I(SII)(SII) \to_\beta SII(SII)$*

- *donnez, si possible, une dérivation de typage pour $SII(SII)$*

  Correction : *On a prouvé en cours que tout terme typable est fortement normalisant. Comme $SII(SII)$ ne termine pas, on en déduit qu'il n'y a pas de derivation de typage.*

Exercice 2 *Soit $\_^\circ$ la fonction sur les λ-termes définie comme suit:*

$$\begin{array}{lcll} x^\circ & := & x & \\ (\lambda x.t)^\circ & := & \lambda x.t^\circ & \\ (tu)^\circ & := & t^\circ u^\circ & \text{si } t^\circ \text{ n'est pas une abstraction} \\ (tu)^\circ & := & v\{x/u^\circ\} & \text{si } t^\circ = \lambda x.v \end{array}$$

Soient t, u deux λ-termes quelconques. Montrer les propriétés suivantes:

1. $t^\circ u^\circ \to_\beta^* (tu)^\circ$.

   Correction :

   Proof. *If t° is not an abstraction, then $t^\circ u^\circ = (tu)^\circ$. If $t^\circ = \lambda y.s$, then $t^\circ u^\circ = (\lambda y.s)u^\circ \to_\beta s\{y/u^\circ\} = (tu)^\circ$.* ∎

2. $t^\circ\{x/u^\circ\} \to_\beta^* t\{x/u\}^\circ$.

   Correction :

   Proof. *The proof is by induction on t.*

   - $t = y$.
     If $y = x$, then
     $x^\circ\{x/u^\circ\} = u^\circ = x\{x/u\}^\circ$.
     If $y \neq x$, then
     $y^\circ\{x/u^\circ\} = y = y^\circ = y\{x/u\}^\circ$.
   - $t = \lambda y.v$. *Then,*
     $(\lambda y.v)^\circ\{x/u^\circ\} = \lambda y.v^\circ\{x/u^\circ\} \to_{\beta\ (i.h.)}^* \lambda y.v\{x/u\}^\circ = ((\lambda y.v)\{x/u\})^\circ$.
   - $t = vw$.
     - *If v° is not an abstraction, then*

       $$\begin{array}{lll} (vw)^\circ\{x/u^\circ\} = & & \\ v^\circ\{x/u^\circ\}w^\circ\{x/u^\circ\} & \to_{\beta\ (i.h.)}^* \ v\{x/u\}^\circ w\{x/u\}^\circ & \to_\beta^* \ (vw)\{x/u\}^\circ \end{array}$$

     - *If $v^\circ = \lambda z.r$, then the i.h. gives $v^\circ\{x/u^\circ\} = (\lambda z.r)\{x/u^\circ\} \to_\beta^* v\{x/u\}^\circ$ so that $v\{x/u\}^\circ = \lambda z.s$ where $r\{x/u^\circ\} \to_\beta^* s$. As a consequence,*

       $$\begin{array}{lll} (vw)^\circ\{x/u^\circ\} = & & \\ r\{z/w^\circ\}\{x/u^\circ\} = & & \\ r\{x/u^\circ\}\{z/w^\circ\{x/u^\circ\}\} & \to_\beta^* & s\{z/w^\circ\{x/u^\circ\}\} \\ & \to_{\beta\ (i.h.)}^* & s\{y/w\{x/u\}^\circ\} \\ & & = (v\{x/u\}u\{x/u\})^\circ \\ & & = (vw)\{x/u\}^\circ \end{array}$$

   ∎

3. $t \to_\beta^* t^\circ$.

   Correction :

Proof. *By induction on t. The interesting case is: $uv \to^*_{\beta\ (i.h.)} u^\circ v^\circ \to^*_\beta (uv)^\circ = t^\circ$.* ▪

Exercice 3 *On considère les expressions sur l'alphabet $\Sigma = \{1/0, \to/2, \times/2\}$ et les propriétés spécifiées par l'ensemble d'équations $\mathcal{E}$ suivant:*

$$
\begin{array}{rcl}
x \times y & = & y \times x \\
x \times (y \times z) & = & (x \times y) \times z \\
(x \times y) \to z & = & x \to (y \to z) \\
x \to (y \times z) & = & (x \to y) \times (x \to z) \\
x \to 1 & = & 1 \\
1 \to x & = & x \\
x \times 1 & = & x
\end{array}
$$

1. *Prouvez que les équations suivantes sont dérivables de manière syntaxique à partir de l'ensemble $\mathcal{E}$*

   - $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$
   - $(x \times y) \to (z \times w) = (x \to (y \to z)) \times (y \to (x \to w))$

   Correction : *On montre seulement la première équation:*

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{(x \times y) \to z \doteq x \to (y \to z) \in \mathcal{E}}{(x \times y) \to z \doteq x \to (y \to z)}
    }{x \to (y \to z) \doteq (x \times y) \to z}\,symm
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{(x \times y) \doteq (y \times x) \in \mathcal{E}}{(x \times y) \doteq (y \times x)}
    }{(x \times y) \to z \doteq (y \times x) \to z}\,ctxt
  }{(x \times y) \to z \doteq (y \times x) \to z}\,trans
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{(x \times y) \to z \doteq x \to (y \to z) \in \mathcal{E}}{(x \times y) \to z \doteq x \to (y \to z)}
  }{(y \times x) \to z \doteq y \to (x \to z)}\,subst
}{x \to (y \to z) \doteq y \to (x \to z)}\,trans
$$

2. *Prouvez que, pour tout terme clos e, $e = 1$.*

   Correction : *Par induction sur la structure des termes, en utilisant les 3 dernières égalités*