Université Paris Diderot - Sorbonne Paris Cité - Master 1 Informatique -
Programmation logique par contraintes
Examen du 12 janvier 2017 - Durée : 2 heures

Informations : Tous les documents sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié.

Exercice 1 *Simplex* (**7 points**)
On considère le problème suivant :
Minimiser $-X-Y$ par rapport à $X \geq 0, Y \geq 0$ et

$$\begin{aligned} 3*Y &\leq X+5 \\ Y+8 &\geq 4*X \end{aligned}$$

- Visualisez le problème en dessinant un plan (axes : X et Y) avec les contraintes. Soyez précis.
- Appliquez l'algorithme simplex (Il est assez simple d'obtenir une forme simplex de base).
- Pour quelles valeurs de X et Y le minimum est-il atteint ?
- Donnez une requête en ECLiPSeCLP permettant d'obtenir le minimum.
- Si on change la fonction objective (ici $-X-Y$) à minimiser, est-ce que le problème à toujours au moins une solution ? Justifiez.
- Donnez une fonction objective (à la place de $-X-Y$) à minimiser de sorte que le minimum soit atteint à plusieurs endroits.
- Dans le problème original on impose en plus que X et Y doivent être des entiers. Quel est le minimum dans ce cas ? Donnez la réponse à partir du dessin (sans calcul).

Exercice 2 *Consistance* (**2 points**)

- Donnez une contrainte **simple** qui est arc-consistante mais qui n'a pas de solution. Cela existe !
- Donnez une contrainte C (avec les domaines des variables) composée de contraintes simples qui sont toutes arc-consistantes mais de sorte que C n'a pas de solution.

Exercice 3 *Consistance* (**5 points**)
On considère la contrainte $Y < Z \wedge Z+1 \leq X \wedge X > Y$ *avec les domaines* $D(X) = \{5,6\}$, $D(Y) = \{2,3,4\}$ *et* $D(Z) = \{2,3,4,5\}$.

- *Rendez la contrainte* **nœud-consistante**.
- *Ensuite rendez-la* **arc-consistante**.
- *Indépendamment, rendez la contrainte* **chemin-consistante**. *Pour cela, on considère*
  - $R_{yz} = \{(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$ *(l'ensemble des couples* (y,z) *qui satisfont la contrainte* $Y < Z$*)*
  - $R_{zx} = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$ *(l'ensemble des couples* (z,x) *qui satisfont la contrainte* $Z+1 \leq X$*) et*
  - $R_{yx} = \{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$ *(l'ensembles des couples* (y,x) *qui satisfont la contrainte* $X > Y$*).*

  et on vérifie que $R_{yx} \subseteq R_{yz} \circ R_{zx}$ *ainsi que* $R_{zx} \subseteq R_{zy} \circ R_{yx}$ *et* $R_{yz} \subseteq R_{yx} \circ R_{xz}$

Exercice 4 *Programmation et borne consistance* (**5 points**)

On considère l'addition suivante :

```
  MAM
+ DAD
------
 MEET
```

où chaque lettre représente un chiffre différent (compris entre 0 et 9). On souhaite connaître la valeur de chaque lettre, sachant que la première lettre de chaque mot représente un chiffre différent de 0. Pour modéliser ce problème on peut considérer que le mot `MAM` a comme valeur `100*M + 10*A + M`, etc. Il faut donc résoudre l'équation $100*M+10*A+M+100*D+10*A+D = 1000*M+100*E+10*E+T$ avec des contraintes supplémentaires sur les variables M, A, D, E, T (domaines, etc.).

— Donnez un programme en ECLiPSe CLP qui résout ce problème.

— On constate que même sans utiliser `labeling` ECLiPSe CLP arrive à trouver une solution : `M = 1, A = 5, D = 8, E = 0, T = 9`. Expliquez comment. Indication : ECLiPSe CLP utilise la borne consistance. Rendez donc borne consistante l'équation ci-dessus. Ensuite, il faut tenir aussi compte des autres contraintes.

Exercice 5 *Programmation* (**4 points**)
On considère le jeu suivant.

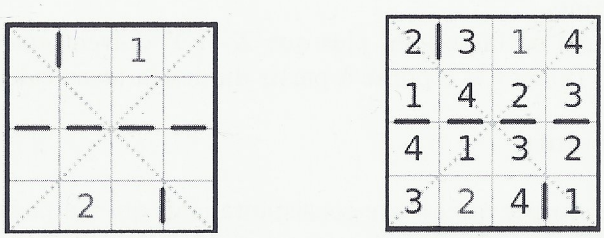

FIGURE 1 – Une grille et sa solution

Chaque case de la grille doit être remplie par un chiffre entre 1 et 4 de sorte que dans chaque colonne, chaque ligne et chaque diagonale il y ait tous les chiffres entre 1 et 4. En plus, la somme des deux cases se situant des deux cotés de chaque trait epais doit être 5.

— Écrivez un programme ECLiPSe CLP pour résoudre la grille de l'exemple.