Infographie - M1

Indications sur l'examen du 18/05/2009

Seule la correction de l'exercice 1 est complète. Toutes les autres de sont de simples indications, dont les calculs doivent être explicités.

Exercice 1 - Perspective

En reprenant la formule du cours avec $O' = (0,0,0)$, $M = (x,y,z)$, en remplaçant A par sa valeur, et en prenant par exemple $\vec{N} = (0,0,1)$, on a:

$$O'\vec{M'} = O\vec{M} = -d \times \vec{N} + \frac{d \times \| \vec{N} \|^2}{\vec{N} \cdot A\vec{M}} \times A\vec{M}$$

$$O\vec{M'} = (0,0,-d) + \frac{d}{(z+d)} \times (x,y,z+d)$$

$$O\vec{M'} = (\frac{1}{(z/d+1)} \times x, \frac{1}{(z/d+1)} \times y, 0)$$

Les coordonnées de M' dans le repère local $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sont alors (produits scalaires avec $\vec{u}$, $\vec{v}$)

$$(\frac{1}{(z/d+1)} \times x, \frac{1}{(z/d+1)} \times y) = T_d(x,y,z)$$

L'ensemble des points M pour lequel $T_d(M)$ est indéfini est bien sûr l'ensemble des points vérifiant l'équation $z + d = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan parallèle à Π et contenant A.

Exercice 2 - Modélisation

Il ne faut certainement pas plus de 7 réels $(s, \theta, \rho, \lambda, a, b, c)$ avec $\theta, \rho, \lambda \in [0, \ldots, 2\pi[$ pour décrire un cube. Etant donné un cube quelconque, il existe en effet :

- une translation de vecteur $(-a, -b, -c)$, où (a, b, c) est l'un des sommes du cube, ramenant ce sommet à l'origine,
- une rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe des z, une rotation d'angle $-\rho$ autour de l'axe des y et enfin, une rotation d'angle $-\lambda$ autour de l'axe des x, dont la composition transforme le cube translaté en un cube dont les sommets sont les éléments de $\{0, s\}^3$,
- un changement d'échelle de valeur $1/s$ pour les trois axes, transformant ce dernier cube en un cube unité.

Ces 7 réels décrivent totalement la transformation inverse passant du cube unité au cube initial : changement d'échelle de valeur s pour les trois axes, rotation d'angle λ autour de l'axe des x, rotation d'angle ρ autour de l'axe des y, rotation d'angle θ autour de l'axe des z, translation de vecteur (a, b, c) - plus exactement, ils permettent de retrouver sa matrice de transformation (c.f. les matrices données cours, et calculer la composition par multiplication de matrices). La suite des sommets du cube est alors obtenue en transformant tous les éléments de $\{0, 1\}^3$.

Remarques. Un choix moins efficace, mais acceptable, consiste à définir le cube par 3 sommets (9 réels), ou un sommet et deux vecteurs (allant de ce sommet vers deux autres). Le quatrième sommet de la face contenant les trois premiers se déduit par translation, et les sommets de la face opposée se déduisent en trouvant un vecteur orthogonal à la face par produit vectoriel.

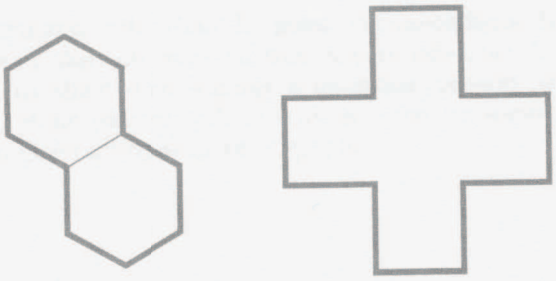
Exercice 3 - Polygones réguliers

(1) On itère $n-1$ fois sur $(1,0)$ la rotation d'angle $2\pi/n$ et de centre O (donner la matrice de rotation correspondante). On peut aussi poser, de manière directe, $P_i = (\cos(i \times 2\pi/n), \sin(i \times 2\pi/n))$. (2) On itère $n-1$ fois au point P la rotation d'angle $2\pi/n$ et de centre C (composer la matrice précédente, à droite avec la matrice de translation ramenant C à l'origine, à gauche avec celle ramenant l'origine à C). (3) Le centre du cercle contenant les sommets d'un polygone régulier est aussi le barycentre des sommets du polygone. En calculant ce barycentre C (moyenne des coordonnées), on peut d'abord vérifier que tous les sommets du polygone sont à même distance de C, donc que les sommets appartiennent bien à un cercle centré en C.

Une fois C calculé, la méthode sans doute la plus économe en moyens consiste à engendrer le polygone régulier à n côtés (où n est le nombre du sommets) contenant l'un des sommets du polygone testé, et à le comparer avec ce dernier. On peut vérifier que les arêtes du polygone ont même longueur, puis vérifier que les arêtes ne s'intersectent qu'aux sommets - ce dernier test permet de gérer par exemple le cas suivant :

Remarques. La comparaison des longueurs d'arêtes ne suffit pas (le polygone peut malgré tout être de forme non régulière). Outre la vérification de la non-intersection des arêtes ailleurs qu'aux sommets et l'égalité de leur longueur, on peut aussi vérifier que les angles formés par deux arêtes successives sont deux à deux égaux, en comparant les sinus *et* les cosinus de ces angles, obtenus à partir de $P_i\vec{P}_{i+1} \propto P_{i+1}\vec{P}_{i+2}$ *et* $P_i\vec{P}_{i+1} \cdot P_{i+1}\vec{P}_{i+2}$. La seule comparaison des sinus ou des cosinus ne suffit pas : $\cos\theta = \cos(-\theta)$ et $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$. La seule comparaison des $C\vec{P}_i \cdot C\vec{P}_{i+1}$ (ou des $C\vec{P}_i \propto C\vec{P}_{i+1}$) est insuffisante pour la même raison, de plus, elle suppose dans tous les cas de calculer d'abord C, qui ne fait pas partie des données.

Une copie affirme que la comparaison des produits scalaires seule (donc seulement des cosinus) suffit, car si un couple d'arêtes forme un angle de θ et le suivant un angle de $-\theta$, "le polygone ne pourrait se refermer sur lui-même". L'idée est intéressante, mais demande un peu de développement. Le polygone *peut* se refermer sur lui-même au moins dans ces cas particuliers :



Exercice 4 - Fenêtrage

Voici le principe d'une solution possible. Les éléments à développer sont les calculs d'intersections (c.f. la remarque ci-dessous). On détermine pour chaque sommet s'il est strictement intérieur, sur le cercle, ou strictement extérieur au cercle (simple calcul de la distance au centre du cercle), et on étiquette les sommets par cette information. On complète ensuite la suite $(P_0, \dots P_{n-1}, P_n = P_0)$ de la manière suivante :

- si P_i est strictement intérieur et P_{i+1} strictement extérieur, on insère entre P_i et P_{i+1} l'intersection de $[P_i, P_{i+1}]$ et du cercle.
- Si P_i et P_{i+1} sont tous les deux strictements extérieurs, on insère entre P_i et P_{i+1} toutes les intersections 0, 1 ou 2 de $[P_i, P_{i+1}]$ et du cercle - s'il y en a deux, on insère la plus proche de P_i suivie de la plus proche de P_{i+1}.

La suite des sommets de Q est alors la sous-suite des sommets du polygone étendu non strictement extérieurs au cercle.

Remarques. Le calcul des intersections ne nécessite rien de plus qu'une simple transposition à la dimension 2 du calcul du point d'impact d'un rayon sur une sphère (c.f. TD 1): on calcule les points d'impacts du rayon d'origine $M = P_i$ et de vecteur $\vec{u} = \vec{P_i P_{i+1}}$ sur le cercle de centre C et de rayon R. L'équation du second degré est la même qu'à la dimension 3, et les intersections sont données par les racines comprises entre 0 et 1 (la plus petite donne l'intersection la plus proche de P_i).

Exercice 5 - Ray-tracing

La solution la plus simple consiste à tronquer le calcul des racines de $\| \vec{u} \|^2 \alpha^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{CM})\alpha + \| \vec{CM} \|^2 - R^2$ (c.f. TD 1) en vérifiant seulement le signe de son discriminant (développer, trouver et simplifier l'inégalité pour trouver le test demandant le moins de calculs).

Exercice 6 - Casse-tête final

Cet exercice est difficile à résoudre en toute généralité. En supposant que les intersections d'arêtes sont réduites à des points (c'est-à-dire que deux arêtes ne se superposent jamais), on peut par exemple construire le graphe dont les sommets sont les intersections d'arêtes du polygone (qu'il s'agisse de sommets du polygone ou non), tel que deux sommets du graphe soient reliés si et seulement si

il existe une portion d'arête reliant les points correspondants. Les composantes bien formées sont alors obtenues en trouvant un ensemble de 1-chemins non triviaux (chemins allant d'un sommet à lui-même, passant par au moins un autre sommet, et ne passant qu'une seule fois par un sommet autre que le sommet initial) couvrant totalement ce graphe.