

Infographie - M1

Examen du 10/01/2017

Remarques et Correction partielle

Le niveau général des copies est extrêmement faible. Trop d'entre elles ne contiennent que de simples collages d'éléments du cours, vaguement en rapport avec les exercices posés, sans aucune réflexion sur leur contenu – j'avoue ne pas vraiment comprendre comment leurs auteurs ont pu espérer obtenir des points de cette manière. L'exercice 4 était difficile, le 5 n'était pas immédiat, mais tous les autres étaient faisables avec un minimum de moyens : à l'exception du premier, ils ont cependant été presque uniformément totalement incompris.

Exercice 1

Plusieurs méthodes équivalentes sont possibles. Vérifier que deux angles opposés ou successifs sont droits ne suffit pas. Vérifier que trois angles sont droits suffit, par exemple par produit scalaire.

Exercice 2

La solution naturelle était de ramener par une suite de rotations centrées en O le point $(1, 1, 1)$ sur l'un des axes, effectuer ensuite la rotation principale sur cet axe, puis effectuer le déplacement inverse.

Noter que l'énoncé ne demandait pas le calcul de la matrice résultant, mais seulement le détail des transformations successives. Par exemple :

1. Rotation d'angle $\pi/4$ sur l'axe des y .
Le point $(1, 1, 1)$ est transformé en $(\sqrt{2}, 1, 0)$.
2. Rotation sur l'axe des z de l'angle dont le cosinus vaut $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ et le sinus vaut $-1/\sqrt{3}$ – peu importe la valeur exacte de l'angle, ces valeurs suffisent pour calculer la matrice de rotation correspondante.
Le point $(\sqrt{2}, 1, 0)$ est transformé en $(\sqrt{3}, 0, 0)$.
3. Rotation d'angle θ sur l'axe des x .
4. Rotation sur l'axe des z de l'angle dont le cosinus vaut $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ et le sinus vaut $1/\sqrt{3}$.
5. Rotation d'angle $-\pi/4$ sur l'axe des y

Exercice 3

Avec le choix des coordonnées, il était inutile de se servir de la formule du cours : une simple application du théorème de Thalès suffit à prouver

$$M' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h}{z+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il faut donc prendre $z = h + 1$ pour que la seconde composante de la vue soit égale à 1.

Exercice 4

Cet exercice était difficile. On suppose évidemment le polygone bien formé, c'est-à-dire sans sommets confondus, sans intersections de ses côtés ailleurs qu'aux sommets sans triplets de sommets successifs alignés. Pour tout polygone $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ sa partie intérieure. On admettra la propriété suivante, intuitivement évidente :

Proposition. Si $(MPNP')$ est bien formé et si P et P' ne sont pas du même côté de (MN) , alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(MPNP') &= \mathcal{I}(MNP) \cup \mathcal{I}(MNP'), \\ \text{et } \mathcal{I}(MNP) \cap \mathcal{I}(MNP') &= [MN].\end{aligned}$$

Il y a deux cas possibles :

1. L'un des points est strictement intérieur au triangle formé par les trois autres. Par exemple D est strictement intérieur au triangle (ABC) :

- (a) La droite (BD) coupe $[AC]$ en un point distinct de A, C . Le polygone n'est donc pas convexe, et d'après la proposition ci-dessus,

$$[BD] \subset \mathcal{I}(ABCD)$$

- (b) De même, (DC) coupe $[AB]$ en un point distinct de A, B , et (AD) coupe $[BC]$ en un point distinct de B, C , donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(BCD) \cap \mathcal{I}(ACD) &= [CD] \\ \mathcal{I}(ABD) \cap \mathcal{I}(ACD) &= [AD]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(ABCD) \cap \mathcal{I}(ACD) &= (\mathcal{I}(ABD) \cup \mathcal{I}(BCD)) \cap \mathcal{I}(ACD) \\ &= (\mathcal{I}(BCD) \cap \mathcal{I}(ACD)) \cup \\ &\quad (\mathcal{I}(ABD) \cap \mathcal{I}(ACD)) \\ &= [AD] \cup [DC]\end{aligned}$$

donc $[AC]$ n'est pas intérieur au polygone.

2. Aucun des points n'est strictement intérieur au triangle formé par les trois autres :

- (a) Puisque $D \notin \mathcal{I}(ABC)$ et $B \notin \mathcal{I}(ADC)$, et puisque le polygone est bien formé, B et D ne sont du même côté de (AC) . Les points du polygone sont donc tous du même côté de (AB) et tous du même côté de (AD) . En outre, $[AC]$ est intérieur au polygone.
- (b) De même, A et C ne sont pas du même côté de (BD) , et les points du polygone sont tous du même côté de (BC) , et tous du même côté de (BA) . On en déduit que le polygone est convexe. En outre, $[BD]$ est intérieur au polygone.

Exercice 5

Sans perspective, la notion de face avant ne dépend que d'une direction d'observation $\vec{U}$ et d'une normale $\vec{W}$ à cette face allant vers l'intérieur du polyèdre : la face est avant si et seulement si $\vec{U} \cdot \vec{W} > 0$.

Avec perspective on peut prendre la définition suivante : soit P un sommet quelconque de la face ; elle est avant si et seulement si $\vec{AP} \cdot \vec{W} > 0$.

Exercice 6

Puisque θ est connu, la méthode la plus simple pour tester l'intériorité d'un point consiste à faire d'abord subir au rectangle et au point une rotation d'angle $-\theta$ centrée en (x_0, y_0) . En supposant l'axe des y dirigé vers le haut, l'intérieur du rectangle devient alors l'union de

- l'intérieur du rectangle de sommets
 $(x_0, y_0 - r), (x_0 + w, y_0 + r), (x_0 + w, y_0 + h - r), (x_0, y_0 + h - r),$
- l'intérieur du rectangle de sommets
 $(x_0 + r, y_0), (x_0 + w - r, y_0), (x_0 + w - r, y_0 + h), (x_0 + r, y_0 + h),$
- l'intérieur des quatre cercles de rayon r , de centres
 $(x_0 + r, y_0 + r), (x_0 + w - r, y_0 + r), (x_0 + w - r, y_0 + h - r), (x_0 + r, y_0 + h - r).$

Les tests d'intériorité associés à chaque forme sont bien sûr immédiats.

Exercice 7

On peut paramétrer le tracé par exemple par :

- la largeur h du tracé (hauteur du rectangle délimitant la région hachurée),
- la largeur w des hachures,
- la distance d entre les centres des régions hachurées sur le segment réel,
- l'angle θ de la rotation à effectuer sur des hachures orthogonales au segment pour obtenir un hachurage oblique (mettons, entre $-\pi/4$ et $\pi/4$).

On peut ensuite (calculs à détailler) :

1. Construire des polygones représentant les bords de hachures suffisamment grandes, orthogonales au segment réel et centrées sur le segment réel.
2. Leur faire subir individuellement une rotation autour de leur centres.
3. Fenêtrer ces polygones par le rectangle délimitant le tracé.
4. Les remplir.