

Infographie - M1

Examen du 25/05/2012

Indications de correction.

Exercice 1

le point M' est donné par $\vec{MM'} = 2\vec{MP}$, où P est la projection orthogonale de M sur Π . Le vecteur $\vec{MP}$ vaut $\alpha \times \vec{N}$ pour un certain α . On doit avoir $\vec{OP}$ orthogonal à $\vec{N}$, soit encore:

$$\vec{OP} \cdot \vec{N} = 0$$

$$(\vec{OM} + \vec{MP}) \cdot \vec{N} = 0$$

$$(\vec{OM} + \alpha \vec{N}) \cdot \vec{N} = 0$$

$$\alpha = -(\vec{OM} \cdot \vec{N}) / \|\vec{N}\|^2$$

Puisque $\vec{N}$ est unitaire, $\alpha = -(\vec{OM} \cdot \vec{N}) = -x_M x_N - y_M y_N - z_N z_M$. D'où :

$$M' = \begin{pmatrix} x_M + 2\alpha x_N \\ y_M + 2\alpha y_N \\ y_M + 2\alpha z_N \end{pmatrix}$$

En développant chaque composante et en réorganisant les termes de manière à faire apparaître les coefficients de x_M , y_M et z_M dans chaque composante, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} x_M(1 - 2x_N x_N) + y_M(-2y_N x_N) + z_N(-2z_N x_N) \\ x_M(-2x_N y_N) + y_M(1 - 2y_N y_N) + z_N(-2z_N y_N) \\ x_M(-2x_N z_N) + y_M(-2y_N z_N) + z_N(1 - 2z_N z_N) \end{pmatrix}$$

La matrice de transformation est donc

$$\begin{pmatrix} 1 - 2x_N x_N & -2y_N x_N & -2z_N x_N & 0 \\ -2x_N y_N & 1 - 2y_N y_N & -2z_N y_N & 0 \\ -2x_N z_N & -2y_N z_N & 1 - 2z_N z_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On utilise le théorème de Thalès. Pour chaque point M du disque, l'ombre M' de M vérifie $L\vec{M'} = (z_L/(z_L - z_C)) \times L\vec{M}$. Les coordonnées de M' sont celles de $\vec{OM'} = \vec{OL} + L\vec{M'}$, soit encore, en identifiant les points à leurs coordonnées, $M' = L + (z_L/(z_L - z_C)) \times (M - L)$. En remplaçant M par $C(t)$, on obtient l'équation du bord de l'ombre – notez qu'il s'agit encore d'un cercle.

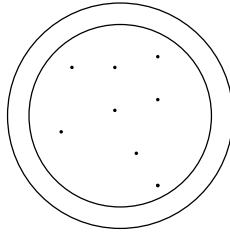
Exercice 3

Cet exercice était assez difficile à résoudre de manière rigoureuse – les indications données ci-dessous font appel à l'intuition et pourraient encore être développées, mais je n'attendais pas un raisonnement plus détaillé.

En résultat intermédiaire, il fallait trouver, retrouver ou tout simplement supposée connue la méthode permettant de calculer le centre du cercle contenant 3 points quelconques non alignés – un exercice déjà posé et corrigé sur ma page dans le sujet de 2010-2011, session 2, et réutilisable tel quel.

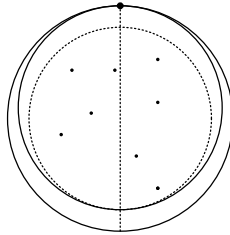
Si $\mathcal{P}$ est réduit à un seul point, le cercle cherché est simplement le cercle de rayon nul et centré sur ce point. Supposons $|\mathcal{P}| \geq 2$.

(1) On commence par montrer le résultat suivant : au moins deux points de $\mathcal{P}$ sont sur $\mathcal{C}$. En supposant qu'aucun point de $\mathcal{P}$ n'est sur $\mathcal{C}$, le cercle $\mathcal{C}$ ne peut pas être de rayon minimal - on peut, entre le bord de $\mathcal{C}$ et les points de $\mathcal{P}$, tracer un cercle de même centre, de rayon strictement plus petit, et dont la surface contient tous les points de $\mathcal{P}$:



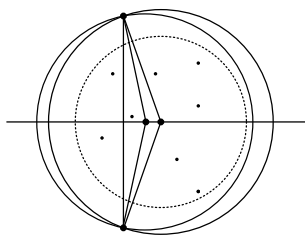
En supposant qu'un seul point M de $\mathcal{P}$ est sur $\mathcal{C}$, là encore, $\mathcal{C}$ n'est pas de rayon minimal. Entre le bord de $\mathcal{C}$ et les points de $\mathcal{P} - \{M\}$ se trouve un espace vide dans lequel on peut tracer un cercle $\mathcal{C}'$ de même centre, de rayon strictement plus petit, et dont la surface contient tous les points de $\mathcal{P} - \{M\}$.

On peut d'autre part tracer un second cercle ayant pour diamètre le segment formé de M et de l'intersection de $\mathcal{C}'$ et du diamètre de $\mathcal{C}$ contenant M . Le cercle résultant alors est de rayon strictement plus petit, il contient encore le point M , et sa surface contient encore tous les points de $\mathcal{P}$,



(2) Il faut ensuite montrer la propriété suivante, un peu plus difficile à établir : si seulement deux points M_1, M_2 de $\mathcal{P}$ sont sur $\mathcal{C}$, alors ces deux points forment nécessairement un diamètre de $\mathcal{C}$. Le centre de $\mathcal{C}$ est en effet sur la médiatrice du segment $[M_1M_2]$, à une certaine distance du segment, et à une même distance R de M_1, M_2 , égale au rayon de $\mathcal{C}$ – plus le centre de $\mathcal{C}$ est proche du segment $[M_1, M_2]$, et plus R est petit.

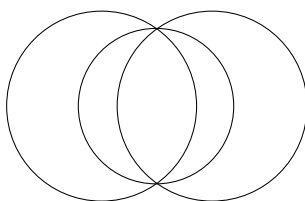
Si $[M_1M_2]$ n'est pas un diamètre de $\mathcal{C}$, il est possible de choisir un nouveau centre plus proche de $[M_1M_2]$, et de construire un cercle contenant encore $[M_1M_2]$, de rayon strictement plus petit, et dont la surface contient encore tous les points de $\mathcal{P}$.



On en déduit immédiatement un algorithme permettant de trouver $\mathcal{C}$ lorsque $|\mathcal{P}| \geq 2$: il suffit de considérer exhaustivement tous les cercles passant par 3 points non alignés de $\mathcal{P}$, ou dont deux points de $\mathcal{P}$ forment un diamètre : l'un de ces cercles est nécessairement l'enveloppe cherchée, ce que l'on peut vérifier par un simple calcul de distances, et un test de minimalité du rayon.

L'unicité de l'enveloppe se démontre facilement. En supposant que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sont deux enveloppes distinctes : l'intersection des surfaces de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ contient tous les points de $\mathcal{P}$, en particulier, les deux cercles ne sont pas disjoints; les deux cercles ont même rayon (ils sont minimaux); aucun des deux cercles n'est intérieur à l'autre (sinon, l'autre serait de rayon plus grand, ou les deux cercles seraient confondus).

On en déduit que $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ s'intersectent en exactement deux points X, X' , et que $[XX']$ est un diamètre de l'un ou de l'autre (sinon, les deux cercles ne pourraient pas être de même rayon). Mais dans ce cas, la surface du cercle de diamètre $[XX']$ contient l'intersection des surfaces de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, donc aussi les points de $\mathcal{P}$, et ce cercle est de diamètre plus petit.



Remarques. Quelques idées en vrac proposées dans les copies :

- Choisir comme centre l'un des points de $\mathcal{P}$ - suivant un certain critère, par exemple la minimalité du cercle centré en ce point et enveloppant tous les autres. Avec seulement deux points, il y a deux cercles candidats, et leur rayon est le double du rayon optimal.
- Prendre pour centre le barycentre des points, et ajuster le rayon de manière à contenir tous les points. Si $\mathcal{P}$ contient un sous-ensemble de points formant un amas très dense, ce amas aura tendance à attirer le centre du cercle en augmentant inutilement son rayon.
- Prendre pour centre le centre de l'enveloppe rectangulaire de $\mathcal{P}$ - une approximation seulement du bon résultat.
- Choisir un cercle de rayon minimal passant par 3 points de $\mathcal{P}$. Il peut y avoir plus d'un cercle candidat, et le rayon du cercle construit est en général trop grand (considérer trois points, le troisième très proche du milieu du segment formé par les deux premiers mais par sur le segment : le cercle résultant est immense, alors que le segment pourrait être choisi comme diamètre).

- Choisir comme diamètre un segment de longueur maximale formé par deux points de $\mathcal{P}$ (l'idée la plus fréquente). Avec 3 points formant un triangle équilatéral de côté 1 : il y a trois cercles candidats; chaque cercle est de rayon $1/2$, et l'un des points est extérieur à celui-ci (à distance $\sqrt{3}/2$ du centre).
- Construire les cercles par ajouts successifs - pour chaque point P ajouté à l'extérieur d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre C déjà construit, le nouveau cercle a pour diamètre le prolongement vers P du diamètre formé par les deux points de $(CP) \cap \mathcal{C}$. L'intérieur du nouveau cercle contient alors l'ancien, ce qui n'est pas en général nécessaire (considérer par exemple deux points, puis ajouter, assez loin du segment formé par ces deux points, un nouveau point sur la médiatrice de segment).

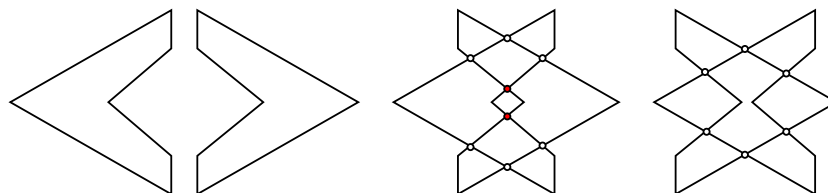
Exercice 4

A noter qu'il ne suffit pas que les bords de deux polygones s'intersectent pour que ces polygones soient joignables. D'autre part, deux polygones peuvent être joignables même si le nombre d'intersections entre leurs arêtes dépasse 2 (voir la figure ci-dessous)

Pour résoudre le problème de la jonction de deux polygones P, P' , on peut par exemple s'inspirer de Weiler-Atherton, avec la même idée de pré-traitement et de parcours alterné entre le bord de P et celui de P' .

On suppose les sommets des polygones énumérés dans le sens direct. Dans les deux polygones on ajoute et l'on marque toutes les intersections d'arêtes - si une intersection se produit sur un sommet, ce sommet est simplement marqué, et dans le cas où des arêtes sont partiellement superposées, on ne considère comme points d'intersection que les extrémités de leur partie commune.

Si aucun point n'a été marqué comme étant une intersection, ou bien l'un des deux polygones est intérieur à l'autre et le second est la jonction cherchée, ou bien les polygones sont disjoints et non joignables. Sinon, soient $\overline{P}, \overline{P}'$ les polygones étendus. On choisit un sommet de l'un des deux polygones non marqué et intérieur à l'autre polygone (si un tel sommet n'existe pas, les polygones ne peuvent être que confondus) - il s'agit par exemple d'un sommet de $\overline{P}$. Si la jonction existe, ce sommet doit être sur son bord. D'autre part, si la jonction existe, le bord de la jonction passe par *toutes* les intersections (faire quelques diagrammes pour s'en convaincre).



A partant de ce sommet, on lance le parcours des sommets de $\overline{P}$, en passant dans $\overline{P}'$ dès que l'on rencontre une intersection, en revenant à $\overline{P}$ dès que l'on rencontre une intersection, en repassant dans $\overline{P}'$ dès que l'on rencontre une intersection, etc. Lorsque l'on revient au sommet de départ, de deux choses l'une : ou bien toutes les intersections ont été visitées, et l'on a parcouru le

bord de la jonction de P, P' ; ou bien l'une des intersections n'a pas été visitée, et les deux polygones ne sont pas joignables.

Le cas général se résout par récurrence. Si un ensemble fini de polygones est joignable et contient au moins deux éléments, il contient nécessairement un couple d'éléments joignables - on peut trouver un tel couple en essayant de joindre de chaque couple. S'il existe, le couple trouvé est remplacé par sa jonction, et on poursuit le traitement sur un ensemble de polygones contenant un élément de moins.