Infographie - M1

Examen du 24/06/2011

Indications de correction

Exercice 1 Posons $Q_i = (0, H, i)$ (le milieu de $[M_iP_i]$) et $R_i = (0, 0, i)$ (projection orthogonale de Q_i' sur le plan Oxz). Les vues en perspective de Q_i, R_i sont de la forme $Q_i' = (0, H_i', 0)$, $R_i' = O$. On a (par Thalès, ou encore, en considérant les triangles rectangles et en passant par les définitions des sinus et cosinus) :

$$\frac{AR_i'}{AR_i} = \frac{d}{d+i} = \frac{AQ_i'}{AQ_i} = \frac{M_i'Q_i'}{M_iQ_i} = \frac{L_i'}{L}$$

où $L_i' = M_i'Q_i'$. Autrement dit la longueur de $[M_i'P_i']$ vaut

$$2L_i' = \frac{d}{d+i} \times 2L$$

Remarques. La longueur apparente du segment ne dépend pas de H - pour comprendre pourquoi, imaginez un observateur placé à l'infini vers les y positifs, et regardant vers les y négatifs. L'observateur voit le plan Π de profil. Le segment $[M_i'P_i']$ est perpendiculaire à son regard, et vu à sa longueur exacte. A présent, imaginez que H varie : du point de vue de l'observateur, la situation ne change pas.

Remarques. On pouvait calculer M_i', P_i' avec la formule du cours (le α tel que, etc.), mais cela ne rendait vraiment pas les choses plus faciles.

Exercice 2 (2.1) La droite Δ est aussi appelée *médiatrice* du segment $[AB]$. On a $AM = MB$ et $AC = BC = R$, donc les triangles AMC et BMC sont égaux à symétrie près. En particulier $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$, et $\widehat{AMC} + \widehat{BMC} = \pi$ puisque A, M, B sont alignés. Donc $\widehat{AMC} = \pi/2$, *i.e.* la droite (MC) est orthogonale à $[AB]$, donc égale à Δ.

Remarques. Le raisonnement ci-dessus n'est présent que dans une seule copie - les autres finissent tôt ou tard par partir de la conclusion.

(2.2) On vérifie que $\vec{P_0P_1} \propto \vec{P_0P_2} \neq 0$. Soient Δ, Δ' les médiatrices respectives de $[P_0P_1]$, $[P_0P_2]$. Le centre cherché est $C = \Delta \cap \Delta'$, calculé comme suit.

Soit $M = (P_0 + P_1)/2$, soit $\vec{U} = (-M_y, M_x)$. On $M \in \Delta$, et $\vec{U}$ est un vecteur directeur de Δ. On calcule le α tel que $(\vec{P_0M} + \alpha \times \vec{U}) \propto P_0P_2 = 0$. On a :

$$\alpha = -\frac{(\vec{P_0M} \propto \vec{P_0P_2})}{\vec{U} \propto \vec{P_0P_2}}$$

Le point C est alors donné par $\vec{OC} = \vec{OM} + \alpha \times \vec{U}$.

Remarques. Comme indiqué dans l'introduction du sujet, j'attendais plus qu'une simple description géométrique du traitement (c'est-à-dire plus que les deux premières lignes de la correction ci-dessus) : il fallait fournir tous les calculs.

Exercice 3

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 - x/R) \\ y \\ \sin(\pi/2 - x/R) \end{pmatrix}$$

Remarques. Personne n'a compris cet exercice - basé sur la simple définition d'un angle.

Exercice 4 Une solution simple, ne modifiant pas la complexité de l'algorithme, consiste à extraire des états successifs de la liste dynamique un découpage de P en petits quadrilatères, chacun avec deux bords horizontaux à ordonnée entière.

Appelons *fil* chaque suite maximale d'arêtes successives $(a_1, \ldots, a_k)$ dont la suite associée de sommets $(p_1, \ldots, p_{k+1})$ verifie $y_{p_1} \leq \ldots \leq y_{p_{k+1}}$. L'extraction des fils peut être faite en coût linéaire en le nombre de sommets du polygone, en même temps que la construction du tableau statique. Chaque fil est balayé par un certain ensemble d'entrées au cours du temps. Il n'est pas trop difficile de modifier l'algorithme de manière à savoir, étant donnée une ordonnée h, si une entrée e dans $\mathcal{L}$ une ligne h et une entrée e' dans $\mathcal{L}$ 'a une ligne $h' > h$ sont sur un même fil. Dans ce cas, on dira que e' est un *successeur* de e (il s'agit éventuellement de la même entrée, mise à jour).

Voici la manière la plus élémentaire d'extraire un ensemble de quadrilatères recouvrant entièrement le polygone. Soit $e_{(h,1)}, e'_{(h,1)}, \ldots, e_{(h,k)}, e'_{(h,k)}$ la suite des éléments de $\mathcal{L}$ à la ligne h, privée de tous les couples d'entrées sans successeurs à la ligne $h+1$ (ceux formant une "pointe" supérieure).

Soient $e_{(h+1,1)}, e'_{(h+1,1)}, \ldots, e_{(h+1,k)}, e'_{(h+1,k)}$ les successeurs de ces entrées à la ligne $h+1$.

Les polygones $((x_{(h,j)}, h), (x'_{(h,j)}, h), (x'_{(h+1,j)}, h+1), (x_{(h+1,1)}, h+1))$ (avec $j \in [1, \ldots k]$) recouvrent toute la portion de P comprise entre les droites horizontales d'ordonnée h et $h+1$.

Noter que chaque quadrilatère ne fait qu'un pixel de hauteur. On peut évidemment tenter de faire mieux, en fusionnant certains d'entres eux - en surveillant les couples d'entrées dont les successeurs restent adjacents d'une ligne à l'autre - mais aussi en surveillant les variations d'incréments à chaque changement d'arête, pour éviter d'introduire de la non-convexité.

Remarques. Aucune copie ne propose de réponse autre... que l'algorithme initial (?!...).