

Infographie - M1

Examen du 28/06/2010

3h - Notes de cours et TD autorisées.

Les algorithmes demandés doivent être rédigés avec le même niveau de détail que ceux vus en cours, et implémentables sans aucune réflexion supplémentaire (i.e. la simple description géométrique du traitement n'est pas suffisante). La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos solutions.

Exercice 1

(1) Soit P un polygone du plan de sommets $P_0, \dots, P_{n-1}$. Donner un algorithme détaillé, *linéaire en n* , déterminant si P est convexe. La linéarité est indispensable.

(2) Soit P un polygone de l'espace de sommets $P_0, \dots, P_{n-1}$. Donner un algorithme détaillé *linéaire en n* déterminant si P est convexe. Là encore, la linéarité est indispensable.

Exercice 2

(1) Soit P un polygone convexe de l'espace, et soit $[AB]$ un segment. Si $[AB]$ n'est pas parallèle P , l'intersection de $[AB]$ et de la surface de P est clairement ou bien vide, ou bien réduite à un point.

Donner un algorithme qui, à partir de la donnée des sommets de P et de $[AB]$: (a) détermine si $[AB]$ et P ne sont pas parallèles; (b) dans ce cas, détermine si $[AB]$ est le surface de P s'intersectent; (c) dans ce cas, renvoie le point d'intersection. Les étapes (b) et (c) pourront être partiellement superposées. Précisez la complexité du traitement.

(2) Soit P, P' deux polygones convexes de l'espace non parallèles. Donner graphiquement un inventaire complet des formes d'intersections possibles de ces deux surfaces.

Donner un algorithme qui, à partir de la donnée des sommets de P, P' : (a) détermine si P, P' ne sont pas parallèles; (b) dans ce cas, détermine s'ils s'intersectent; (c) dans ce cas, détermine la forme de cette intersection, et renvoie la description adéquate de celle-ci. Là encore, les étapes (b) et (c) pourront être partiellement superposées. Précisez à nouveau la complexité du traitement.

Exercice 3

On considère un polyèdre convexe P représenté par modélisation surfacique, avec les notations suivantes : liste de sommets $v_0, \dots, v_n$; liste d'arêtes $e_0, \dots, e_m$; liste de faces $f_0, \dots, f_p$; pour chaque arête e , $\alpha(e)$, $\beta(e)$, $\sigma_+(e)$ et $\sigma_-(e)$ valant respectivement le début, la fin, le successeur positif et le successeur négatif de e ; pour chaque face f , arêtes et sommets de f spécifiées par $\varepsilon(f)$ et $\pi(f)$ valant respectivement une arête et un sens de parcours de cette arête.

(1) Soit $i \in [0, \dots, m]$. Appelons *1-subdivision de P en i* le polyèdre obtenu en ajoutant à P un nouveau sommet v'_i situé sur e_i , et en remplaçant e_i par deux arêtes e'_i et e''_i , allant respectivement de $\alpha(e_i)$ à v'_i , et de v'_i à $\beta(e_i)$. Donner le détail des fonctions $\alpha', \beta', \sigma'_+, \sigma'_-, \varepsilon', \pi'$ associées à ce nouveau polyèdre.

(2) Soit $j \in [0, \dots, p]$ tel que f_j contienne plus de trois sommets. Soit $v_{i_0}, \dots, v_{i_q}$ la suite des sommets de f_j énumérés dans l'ordre spécifié par $\varepsilon(f_j), \pi(f_j)$. Appelons *2-subdivision de P en j* le polyèdre obtenu en ajoutant à P une arête e_{m+1} allant de v_{i_0} à v_{i_1} , et en remplaçant f_j par deux faces f'_j et f''_j , la première de suite de sommets $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}$, la seconde de suite de sommets $v_{i_0}, v_{i_2}, \dots, v_{i_q}$.

Donner le détail des fonctions $\alpha', \beta', \sigma'_+, \sigma'_-, \varepsilon', \pi'$ associées à ce nouveau polyèdre - les fonctions ε' et π' devront spécifier un ordre d'énumération des sommets de f'_j, f''_j identique à celui indiqué ci-dessus.

Exercice 4

On considère l'espace 3D muni du repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$. Soit Π un plan quelconque. Soit S une sphère centrée à O' , de rayon 1. Soit C le cercle de rayon 1 centré en O' contenu dans Π .

(1) Montrer que pour tout point M de S , la projection orthogonale de M sur Π appartient au disque de bord C .

(2) On munit Π d'un repère local $(O', \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé. Soit $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Soit Π_0 le plan contenant l'origine O engendré par $\vec{i}, \vec{j}$. Donner, pour tout point M de Π de coordonnées (x', y') dans le repère local, les coordonnées (X, Y) de la projection de M sur Π_0 suivant $\vec{w}$, exprimées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de Π_0 .

(3) On suppose à présent que $u_y = v_x = v_z = 0$, et que la projection de O' sur Π_0 suivant $\vec{w}$ est égale à O . Simplifier l'expression de (X, Y) trouvée en (2) avec ces hypothèses supplémentaires.

(4) Rappelons que l'équation d'une ellipse centrée en O dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de Π_0 est de la forme $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$.

Montrer qu'avec les hypothèses faites en (3), la projection suivant $\vec{w}$ de C sur Π_0 de C est une ellipse centrée en O , en calculant explicitement ses coefficients a, b, c associés. Dédire de (1) que la projection des points de S sur Π_0 suivant $\vec{w}$ couvre exactement la surface de cette ellipse. Expliquer pourquoi, de manière plus générale, ce résultat montre que la projection des points d'une sphère sur un plan suivant un vecteur forme toujours une ellipse.