Infographie - M1

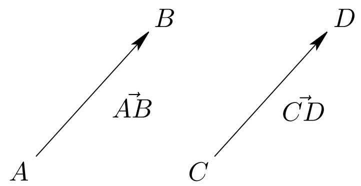
Chapitre 1 - Rappels d'Algèbre

V.Padovani
Equipe Preuves, Programmes et Systèmes, Université Paris 7

Nous rappelons ici les éléments d'algèbre élémentaire utilisés dans toutes la suite : points, vecteurs, coordonnées, matrices, ainsi que les trois opérations de base les plus fréquemment utilisées en algorithmique infographique - produit en croix, produit scalaire, produit vectoriel. Les notions de points et vecteurs seront considérées dans leur sens le plus intuitif - et non, si l'on souhaitait être plus rigoureux, comme les éléments d'un espace affine et ceux d'un espace vectoriel.

1 Points, Vecteurs

Un *point* est un emplacement dans l'espace usuel. Un *vecteur* est un trajet rectiligne entre deux points, en considérant comme égaux les trajets de même direction et de même longueur, *i.e.* en notant $\vec{AB}$ le trajet allant d'un point A à un point B, on a par exemple $\vec{AB} = \vec{CD}$ dans le diagramme ci-dessous :



Deux vecteurs parallèles, mais éventuellement de directions opposées et de longueurs différentes, seront dont *colinéraires* ((c'est-à-dire "sur la même ligne").

1.1 Coordonnées des points et vecteurs

Les points et vecteurs de l'espace à 3 dimensions seront uniformément représentés par des triplets de réels. Un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ représentant un point ou un vecteur sera appelé *coordonnées* de ce point ou de ce vecteur. En fonction du contexte, un triplet pourra être vu soit comme un point, soit comme un vecteur. Un point A est donc un triplet de réels (A_x, A_y, A_z) vu comme un point, et un vecteur $\vec{U}$, un triplet de réels (U_x, U_y, U_z) vu comme un vecteur. Le point et le vecteur de coordonnées nulles se notent respectivement O et $\vec{O}$.

1.2 Opérations sur les coordonnées

On généralise l'addition usuelle des réels aux triplets de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en posant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

On définit d'autre part la multiplication d'un réel $k \in \mathbb{R}$ et d'un triplet de réels $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en posant :

$$k \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \\ k \times z \end{pmatrix}$$

On pose également:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-1) \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$$

Avec ces conventions, on définit les coordonnés du vecteur $\vec{AB}$ comme étant égales à $B - A$. Noter que $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement $B - A = D - C$, et que pour tout A, le vecteur $\vec{OA}$ et le point A sont deux objets de nature distincte, mais ont les même coordonneés. On vérifie facilement d'autre part que pour tous points A, B, C, on a :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

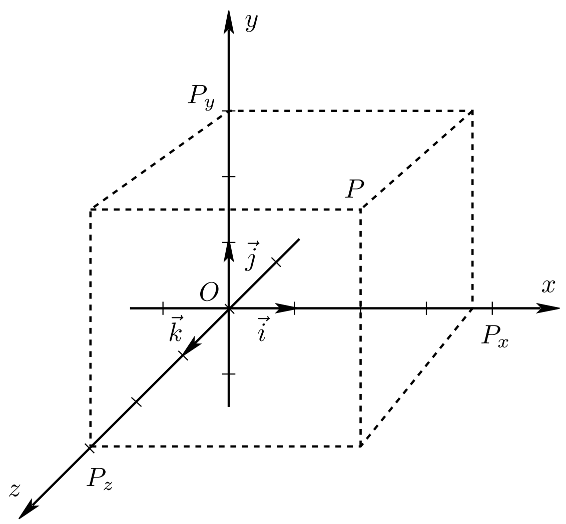
La *norme* d'un vecteur est par définition $||\vec{U}|| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$. Les propriétés suivantes sont facilement vérifiables:

- $||\vec{AB}|| =$ est égale à la distance entre A et B
- $||\alpha \times \vec{U}|| = |\alpha| \times ||\vec{U}||$
- $||\vec{U} + V|| \leq ||\vec{U}|| + ||\vec{V}||$

Toutes ces définitions se spécialisent aux couples de $\mathbb{R}^2$, représentant les positions de points dans l'espace à deux dimensions : il suffit d'oublier la troisième composante de chaque triplet, ou encore de lui donner une valeur toujours nulle.

1.3 Modélisation de l'espace 3D usuel

Les coordonnées d'un point permettent de spécifier sa position dans l'espace relativement à un certain *repère*, défini en choisissant : un point *origine*, de coordonnés nulles (le point O), et trois vecteurs deux à deux non colinéaires, notés $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Les coordonnés (P_x, P_y, P_z) d'un point spécifient alors sa position dans l'espace en convenant du fait que $\vec{OP} = P_x \times \vec{i} + P_y \times \vec{j} + P_z \times \vec{z}$. En pratique, on choisit un repère standard $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "orthonormé de type main droite", dans lequel les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont de longeur 1, deux à deux orthogonaux, et orientés comme suit :



2 Produit en Croix (en dimension 2)

2.1 Définition

Le *produit croisé* ou *produit en croix* de deux vecteurs du plan est défini par:

$$\vec{U} \propto \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} = U_x V_y - U_y V_x$$

2.2 Propriétés

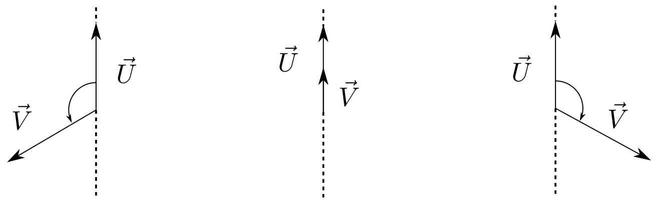
- *anti-commutatif* : $\vec{U} \propto \vec{V} = -(\vec{U} \propto \vec{V})$
- *associatif* avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(\alpha \times \vec{U}) \propto \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \propto \vec{V})$
- *distributif* par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \propto (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \propto \vec{V}) + (\vec{U} \propto \vec{W})$

2.3 Interprétation

Le produit croisé fournit, en dimension 2, un *test de colinéarité* pour deux vecteurs non nuls, et d'autre part, un *test de placement* d'un point relativement à une droite. La propriété suivante est en effet démontrable :

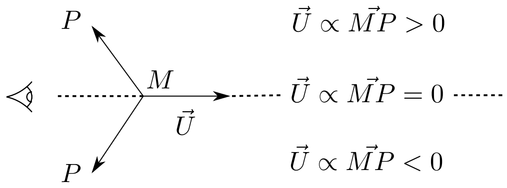
$$\vec{U} \propto \vec{V} = \| \vec{U} \| \times \| \vec{V} \| \times \sin\theta$$

où θ est l'angle $\widehat{\vec{U}\,\vec{V}}$. En particulier, si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont non nuls, on a $\vec{U} \propto \vec{V} = 0$ si et seulement si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires. Si par contre $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires, la rotation minimale de $\vec{U}$ alignant $\vec{U}$ avec $\vec{V}$ tourne dans le sens *direct* si $\vec{U} \propto \vec{V} > 0$ (sens inverse des aiguilles d'une montre), dans le sens indirect si $\vec{U} \propto \vec{V} < 0$.



$\vec{U} \propto \vec{V} > 0$ $\qquad$ $\vec{U} \propto \vec{V} = 0$ $\qquad$ $\vec{U} \propto \vec{V} < 0$

Soit à présent $\mathcal{D}$ une droite contenant un point M, et de vecteur directeur $\vec{U}$ c'est-à-dire contenant pour tout $k \in \mathbb{R}$ le point X tel que $\vec{MX} = k \times \vec{U}$. En plaçant en M un observateur regardant dans la direction $\vec{U}$, on a :



- $\vec{U} \propto \vec{MP} = 0 \Longleftrightarrow P$ est sur D
- $\vec{U} \propto \vec{MP} > 0 \Longleftrightarrow P$ est "à gauche" de D
- $\vec{U} \propto \vec{MP} < 0 \Longleftrightarrow P$ est à droite de D

Le produit en croix permet d'autre part de retrouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ à partir de la donnée de M et de $\vec{U}$. On a en effet :

$$X = (x, y) \in D \Longleftrightarrow \vec{U} \propto \vec{MX} = 0 \Longleftrightarrow U_x \times (y - M_y) - U_y \times (x - M_x) = 0$$

3 Produit scalaire (en dimension 2 ou 3)

3.1 Définition

Le *produit scalaire* de deux vecteurs de l'espace (ou du plan, en oubliant la composante z), est défini par :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (U_x \times V_x) + (U_y \times V_y) + (U_z \times V_z)$$

3.2 Propriétés

- $\vec{U} \cdot \vec{U} = \parallel \vec{U} \parallel^2$
- *commutatif* $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- *associatif* avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(\alpha \times \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha \times (\vec{U} \cdot \vec{V})$
- *distributif* par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{V}) + (\vec{U} \cdot \vec{W})$

3.3 Interprétation

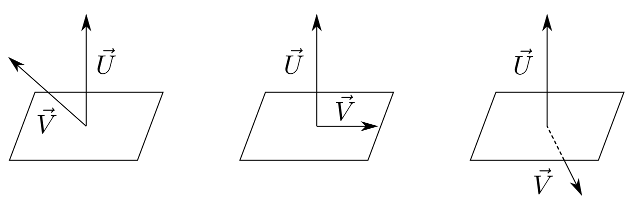
Le produit scalaire permet de déterminer la forme (aigu, droit, ou obtus) de l'angle entre deux vecteurs non nuls. En 3D, il fournit également un test de placement d'un point relativement à un plan. On a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \parallel \vec{U} \parallel \times \parallel \vec{V} \parallel \times \cos\theta$$

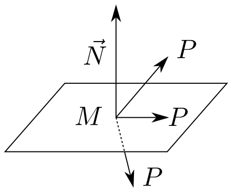
où $\theta \in]-\pi, \pi]$ est l'angle $\widehat{\vec{U}\,\vec{V}}$. On en deduit :

- $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0 \Leftrightarrow |\theta| < \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ forment un angle aigu
  (strictement plus petit que l'angle droit)
- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow |\theta| = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux
- $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0 \Leftrightarrow |\theta| > \pi/2 \Leftrightarrow \vec{U}$ et $\vec{V}$ forment un angle obtus
  (strictement plus grand que l'angle droit)

$\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$ $\qquad$ $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ $\qquad$ $\vec{U} \cdot \vec{V} < 0$



Soit à présent un plan Π contenant un point M, et de normale $\vec{N}$ (*i.e.* $\vec{N}$ est un vecteur orthogonal au plan). On a :



$\vec{N} \cdot \vec{MP} > 0$

$\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$

$\vec{N} \cdot \vec{MP} < 0$

- $\vec{N} \cdot \vec{MX} = 0 \iff X$ appartient à Π
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} > 0 \iff X$ est du même côté du plan que $\vec{N}$.
- $\vec{N} \cdot \vec{MX} < 0 \iff X$ est du côté du plan opposé à $\vec{N}$.

L'équation du plan est $\Pi(X) = 0$, avec $\Pi(X) = \vec{N} \cdot \vec{MX}$, soit:

$$N_x \times (x - M_x) + N_y \times (y - M_y) + N_z \times (z - M_z) = 0$$

4 Produit vectoriel (dimension 3)

4.1 Définition

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs de l'espace est défini par :

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} U_y & V_y \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_z & V_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_yV_z - U_zV_y \\ -U_xV_z + U_zV_x \\ U_xV_y - U_yV_x \end{pmatrix}$$

4.2 Propriétés

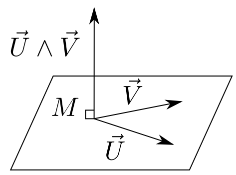
- anti-commutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$
- associatif avec le produit d'un réel et d'un vecteur :
  $(k \times U) \wedge \vec{V} = k \times (U \wedge V)$.

- distributif par rapport à l'addition des vecteurs :
  $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$.
- non associatif.

4.3 Interprétation

En dimension 3, le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls et non colinéaires est un nouveau vecteur non nul et orthogonal aux deux premiers (si $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, ou si $\vec{U}, \vec{V}$ sont colinéaires, leur produit vectoriel est le vecteur nul).

Il permet en particulier de calculer une normale $\vec{N}$ au plan engendré par un point M et deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (l'ensemble des points X tels que $\vec{MX} = \alpha \times \vec{U} + \beta \times \vec{V}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).



Noter que $\vec{V} \wedge \vec{U}$ est une normale au plan de direction opposée - le test de placement d'un point obtenu à partir de cette normale opposée founit l'oppsé de la réponse obtenue en choisissant pour normale au plan le produit $\vec{U} \wedge \vec{V}$. Les propriétes suivantes sont démontrables :

- $\| \vec{U} \wedge \vec{V} \| = \| \vec{U} \| \times \| \vec{V} \| \times \sin\theta$ où $\theta = \widehat{\vec{U}\ \vec{V}}$.
- Si $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \neq \vec{0}$, $(M, \vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ est un repère local de type "main droite" (la rotation continue de $\vec{U}$ alignant $\vec{U}$ avec $\vec{V}$ puis avec $(\vec{U} \wedge \vec{V})$ tourne dans le sens direct).

5 Matrice de Transformations

Les transformations de points ou de groupes de points telles que translations, rotations, changements d'échelle (scaling) sont habituellement représentées, à une dimension donnée (2 ou 3), par des matrices carrées, dont le côté est égal à la dimension courante plus 1. On traitera ici le cas de la dimension 3, avec des transformations uniformément représentées par des matrices 4×4. Toutes ces matrices seront de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1 Rappels

Rappelons que le produit de deux matrices $n \times p$ et $p \times q$ est une matrice $n \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mathrm{p}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & \dots & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\mathrm{q}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\mathrm{p}1} & \dots & b_{\mathrm{pq}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1\mathrm{q}} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{\mathrm{n}1} & \dots & c_{\mathrm{nq}} \end{pmatrix}$$

où $c_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{i}1} \times b_{1\mathrm{j}} + \ldots + a_{\mathrm{ip}} \times b_{\mathrm{pj}}$. Pour toute matrice $\mathcal{M}$ de taille $n \times p$ et pour tout $X = (x_1, \ldots, x_p)$, on notera $\mathcal{M} \times X$ le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\mathrm{p}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} & & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times x_1 + \ldots + a_{1\mathrm{p}} \times x_{\mathrm{p}} \\ \vdots \\ a_{\mathrm{n}1} \times x_1 + \ldots + a_{\mathrm{np}} \times x_{\mathrm{p}} \end{pmatrix}$$

5.2 Calcul du transformé d'un point

La méthode pour calculer le transformé d'un point P par une transformation T représentée par la matrice $\mathcal{M}_T$ est toujours la même :

- On ajoute à P une coordonnée, toujours égale à 1.
  On obtient un point $P' = (P_x, P_y, P_z, 1)$.
- On calcule la valeur de $\mathcal{M}_T \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix}$

  A noter que la matrice $\mathcal{M}_T$ est toujours construite de manière à ce que le dernier coefficient du résultat soit égale à 1 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}P_x + a_{12}P_y + a_{13}P_z + a_{14} \\ a_{21}P_x + a_{22}P_y + a_{23}P_z + a_{24} \\ a_{31}P_x + a_{32}P_y + a_{33}P_z + a_{34} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- On oublie la dernière composant de $Q' = (Q_x, Q_y, Q_z, 1)$ On obtient un point $Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$ qui est l'image de P par T.

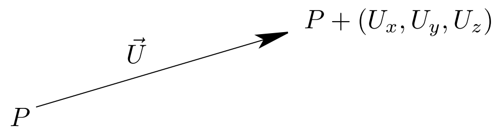
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{M} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

5.3 Transformations usuelles

La *composition* des transformations se fait par simple produit de leurs matrices : $\mathcal{M}_{T \circ T'} = \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_{T'}$ Si T est inversible, l'*inverse* de T a pour matrice l'inverse de la matrice de T : $\mathcal{M}_{T^{-1}} = \mathcal{M}_T^{-1}$. Voici la forme des matrices correspondant à diverses transformations usuelles :

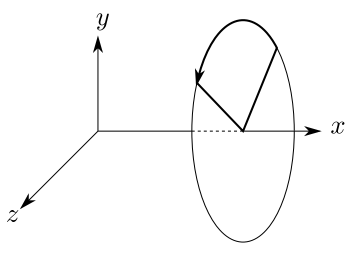
- *Translation* d'un point par un vecteur $\vec{U}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & U_x \\ 0 & 1 & 0 & U_y \\ 0 & 0 & 1 & U_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x + U_x \\ P_x + U_y \\ P_x + U_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



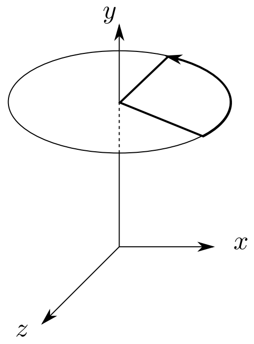
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \times cos\theta - P_z \times sin\theta \\ P_y \times sin\theta + P_z \times cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$



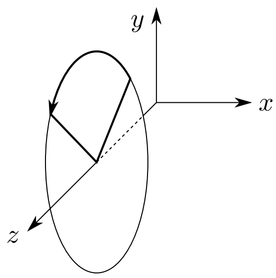
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des y

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \times cos\theta + P_z \times sin\theta \\ P_y \\ -P_x \times sin\theta + P_z \times cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$



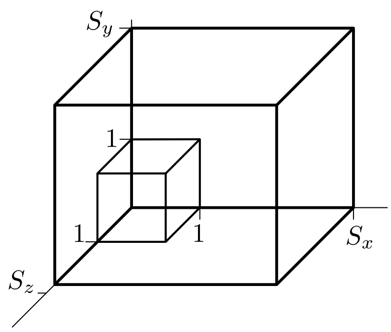
- *Rotation* d'angle θ autour de l'axe des z :

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \times cos\theta - P_y \times sin\theta \\ P_x \times sin\theta + P_y \times cos\theta \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



- *Changement d'échelle* non uniforme pour les trois axes, centré en l'origine :

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \times P_x \\ S_y \times P_x \\ S_z \times P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



5.4 Autres transformations

Les rotations dont l'axe est une droite quelconque, toutes les formes de symétries, les cisaillements (shearing), se construisent facilement par composition de rotations, translations et changements d'échelles. Pour les déformations, en général les matrices ne suffisent plus.