M1 Informatique – Paris Diderot - Paris 7
Introduction à l'Intelligence Artificielle et à la Théorie des Jeux

Examen partiel du 9 novembre 2017 - Durée: 2h00
*Documents autorisés; le barème est donné à titre indicatif.*

**Exercice 1 Algorithmes de recherche: Loup, Chevre, Salade [9 points]**

Un fermier doit passer la rivière dans une barque juste assez grande pour lui et son loup, ou lui et sa chèvre, ou lui et sa salade. La salade sera mangée s'il la laisse seule avec la chèvre, et la chèvre sera mangée s'il la laisse seule avec le loup.

Le problème consiste à faire passer le loup ($L$), la chèvre ($C$) et la salade ($S$) sains et saufs de la rive gauche($g$) à la rive droite($d$) de la rivière, en minimisant le nombre de traversées (on dira que chaque traversée coûte 1).

On modelise un état de ce problème de recherche par un couple $(r, S)$ où $r \in \{g, d\}$ désigne la rive sur laquelle se trouvent la barque et le fermier, et $S \subseteq \{L, C, S\}$ désigne les animaux/objets se trouvant sur la rive droite de la rivière[1].

1. Donner l'état initial et l'état final du problème.
2. Appliquer l'algorithme de recherche à coût uniforme, à partir de l'état initial, et indiquer le nombre de noeuds dévéloppés et la solution trouvée.
3. Donner une fonction heuristique admissible $h$ pour ce problème.
4. Appliquer l'algorithme de recherche gloutonne utilisant $h$, à partir de l'état initial, et indiquer le nombre de noeuds dévéloppés et la solution trouvée.
5. On considère la recherche locale *hill-climbing* qui utilise $h$ pour évaluer les états, à partir de $(g, \{C\})$. Est-ce que la recherche termine sur un optimum local qui n'est pas la solution (justifier)?

**Exercice 2 Jeux combinatoires: positions dominantes [2 points]**

Soit $J = (\mathcal{P}, f)$ un jeu combinatoire impartial et normal.
On dira que $p \in \mathcal{P}$ *est une position dominante* s'il existe $p' \in f(p)$ tel que pour tout $p'' \in \mathcal{P}$:

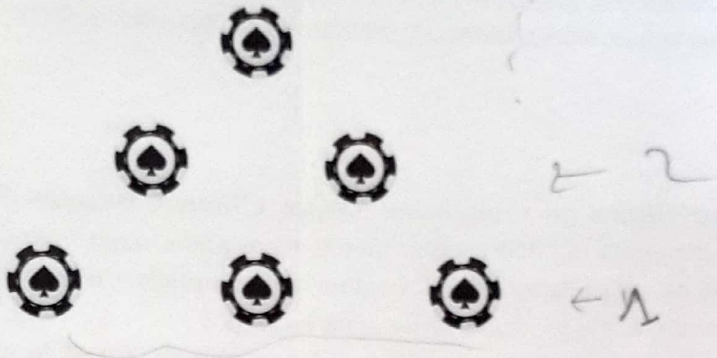
$$\text{si } p'' \in f(p') \text{ alors } p'' \in f(p)$$

Montrer que si un position est dominante alors elle est gagnante.

[1]On ne considère que les états qui respectent les contraintes du problème. Par exemple $(g, \{L, C\})$ n'est pas un état, car si $L$ et $C$ se trouvent sur la rive droite alors que le fermier se trouve sur la rive gauche, alors $L$ mange $C$.

**Exercice 3 Jeux combinatoires: triangle [9 points]**

Soit $T_n$ le jeu combinatoire impartial et normal dont la position initiale est un triangle de jetons de hauteur et de base $n$. Par exemple, la position initiale de $T_3$ est la suivante:




Dans le jeu $T_n$, on appellera rangée 1 celle contenant $n$ jetons, rangée 2 celle en contenant $(n-1)$ et ainsi de suite. La rangée $n$, qui est la plus élevée, contient 1 jeton.

La règle du jeu est la suivante: le joueur qui a la main doit

*retirer un nombre strictement positif quelconque de jetons*
*de la rangée la plus élevée qui possède encore des jetons*[2]

1. Donner l'arbre de jeu ayant comme racine la position initiale de $T_3$ , le joueur *max* ayant la main (vous noterez $\triangle$ l'unique position finale). Évaluer l'arbre en utilisant l'algorithme minmax (le feuilles *max* valent $-1$, les feuilles *min* 1)

2. Donner la valeur de la fonction de Sprague-Grundy sur chacune des positions du jeu $T_3$.

3. Donner les positions perdantes de $T_n$ (justifier).

Nous allons compliquer la règle du jeu: on dira que chaque jeton de chaque rangée $m > 1$ *est posé* sur deux jetons: le jeton à sa gauche et celui à sa droite de la rangée $(m-1)$. Un jeton est *libre* si aucun jeton n'est posé sur lui. Le jeu $TI_n$ a la même position initiale que $T_n$, et la règle de jeu suivante: le joueur qui a la main doit

*retirer un nombre strictement positif quelconque*
*de jetons libres de la position courante*[3]

4. Donner une position du jeu $T_3$ qui est perdante pour $T_3$ et gagnante pour $TI_3$.

5. Donner la valeur de la fonction de Sprague-Grundy sur chacune des positions du jeu $TI_3$.

6. Donner la valeur de la fonction de Sprague-Grundy sur la position initiale de $TI_4$.

7. Montrer que pour tout $n$, la valeur de la fonction de Sprague-Grundy sur la position initiale de $TI_n$ est inférieure ou égale à 1.

---

[2]Donc le coup initial est forcé, et consiste en retirer l'unique jeton de la rangée $n$; par la suite, plusieurs options s'ouvrent.

[3]Remarquer que le coup intial de $TI_n$ reste le même que celui de $T_n$, que l'ensemble des positions de $T_n$ est inclus au sense strict dans l'ensemble de positions de $TI_n$, que dans une position commune au deux jeux, tous les coups de $T_n$ demeurent jouables dans $TI_n$, et qu'il existe en général des coups jouables dans $TI_n$ qui ne sont pas jouables dans $T_n$.