

M1 Informatique – Paris Diderot - Paris 7

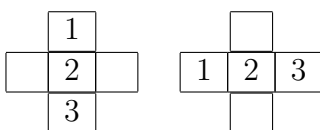
Introduction à l'Intelligence Artificielle

Examen partiel du 28 octobre 2016 - Durée: 2h00

Documents autorisés; le barème est donné à titre indicatif.

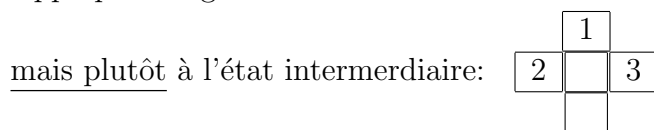
Exercice 1 Algorithmes de recherche: le 5-taquin (10 points) Dans cet exercice, on considère une variante du jeu du taquin, qui se joue sur une grille de cinq cases, dont deux sont vides et trois sont occupées par des tuiles numérotées. Comme dans le jeu du taquin, un coup consiste à faire glisser une tuile numérotée vers une case vide adjacente. Le coût de chaque coup est 1.

Voici la position initiale, à gauche, et la solution, à droite:



Dans le déroulement des différents algorithmes de recherche pour ce problème, vous allez appliquer l'optimisation qui consiste à ne pas réinstaller dans l'arbre de recherche les états se trouvant dans le chemin qui mène de la racine au noeud courant. Pour chaque algorithme, après avoir construit l'arbre de recherche, indiquez le nombre de noeuds développés.

1. Appliquez l'algorithme de recherche à coût uniforme pour aboutir non pas à la solution



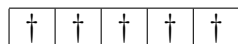
(la recherche s'arrête quand un noeud correspondant à l'état recherché est développé).

2. Donnez une estimation de la taille de l'arbre de recherche à coût uniforme aboutissant à la solution.
3. Définissez une fonction heuristique admissible pour ce problème et appliquez l'algorithme glouton jusqu'à ce que la solution soit développée, avec votre heuristique.
4. On dira qu'une heuristique admissible h est *fidèle* si pour tout état e tel que $h(e) > 0$ il existe un état f atteignable à partir de e tel que $h(f) < h(e)$.
 - (a) Montrez que si on utilise une heuristique fidèle pour évaluer les états lors d'une recherche locale *hill climbing*¹ on ne pourra pas s'arrêter sur un optimum local qui n'est pas une solution (un très bref argument suffit).
 - (b) Votre heuristique du point 3 est-elle fidèle? Si elle ne l'est pas, donnez un état du 5-taquin, différent de la solution, qui est un optimum local pour la recherche locale *hill climbing* basée sur votre heuristique
 - (c) Montrez qu'il existe une heuristique fidèle pour le 5-taquin.
 - (d) (hors-barème) Donnez une heuristique fidèle pour le 5-taquin.

¹Rappel: la recherche *hill climbing* se base sur le choix de la meilleure valeur parmi celles de l'état courant et de ses voisins.

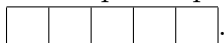
Exercice 2 Jeux combinatoires: une variante du jeu de Keyles (10 points)

On considère le jeu impartial et normal dont la position initiale est une rangée de 5 pions. Le pion de rang 1 est le plus à gauche dans la rangée, celui de rang 2 est le deuxième à partir de la gauche et ainsi de suite jusqu'au pion de rang 5, le plus à droite. Pour $2 \leq i \leq 4$, les *voisins* du pions de rang i sont les pions de rang $(i - 1)$ et $(i + 1)$. L'unique voisin du pion de rang 1 est celui de rang 2, et l'unique voisin du pion de rang 5 est celui de rang 4. Voici une représentation de la position initiale:



La règle du jeu est la suivante: le joueur qui a la main choisit un des pions de la position courante et *enlève ce pion et ses voisins*². Il y a donc autant de coups jouables que de pions dans la position courante; par exemple cinq coups sont jouables à partir de la position initiale. Le jeu étant normal, le joueur qui a la main alors qu'il n'y a plus de pions perd.

1. Dessiner l'arbre de jeu *complet* à partir de la position initiale. La racine de l'arbre est étiquetée par la position initiale et ses feuilles par l'unique position finale, à savoir



2. Vous allez associer à chaque noeud de l'arbre dessiné au point précédent sa valeur MinMax (écrivez ces valeurs à côté des noeuds, de manière lisible): le joueur **Max** commence le jeu, et les feuilles de l'arbre de jeu sont évaluées comme suit:

- La valeur d'une feuille de niveau **Max** est -1 (**Max** a la main et perd).
- La valeur d'une feuille de niveau **Min** est 1 (**Min** a la main et perd).

Avec cette évaluation des feuilles, exécutez l'algorithme MinMax sur l'arbre du point 1.

3. La position initiale est elle gagnante? Quel pion faut-il choisir au début?

À partir de maintenant, on désigne par J_n le jeu identique à celui décrit ci-dessus, mais ayant comme position initiale une rangée de n pions. Nous nous sommes occupés jusqu'ici du jeu J_5 .

4. Montrer que la position initiale de J_4 est perdante.

5. Montrer que la position

†	†	†				†
---	---	---	--	--	--	---

 de J_7 est gagnante.

Une fois que la rangée de pions est coupée, le jeu continue de manière indépendante dans chaque segment: par exemple, jouer au jeu J_7 à partir de la position

†	†	†				†
---	---	---	--	--	--	---

 équivaut à jouer au jeu $(J_3 + J_1)$ à partir des positions initiales respectives, où $+$ désigne la somme de jeux combinatoires. Dans les deux points suivants, utilisez le théorème de Sprague-Grundy³ sans toutefois calculer explicitement les valeurs de la fonction f_{SG} :

²Au fur et à mesure que la partie avance, il se peut que le pion choisi n'ait aucun voisin dans la position courante. Dans tous les cas, le pion choisi aura 0, 1, ou 2 voisins, le cas 0 voisins étant impossible dans la position initiale. Le pion choisi par le joueur qui a la main et ses voisins sont retirés au même temps de la position courante.

³Rappel: Le théorème de Sprague-Grundy affirme que:

1. Une position p d'un jeu impartial et normal K est perdante si et seulement si $f_{SG}^K(p) = 0$.
2. Si K_1 et K_2 sont deux jeux combinatoires impartiaux et normaux, p_1 est une position de K_1 et p_2 est une position de K_2 , alors $f_{SG}^{K_1+K_2}(p_1, p_2) = f_{SG}^{K_1}(p_1) \oplus f_{SG}^{K_2}(p_2)$ où $\oplus$ désigne la somme Nim des entiers. Cet énoncé généralise au cas de n jeux impartiaux et normaux.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la position initiale de J_{2n+1} est gagnante.
6. Montrer que la position suivante de J_{24} est perdante (utilisez, entre autre, le resultat du point 4).

†	†	†	†	†	†	†				†	†	†	†				†	†	†	†	†	†	†	†
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	--	--	--	---	---	---	---	---	---	---	---

Dans les deux points suivants, il s'agit de calculer explicitement les valeurs de f_{SG} :

7. Donner la fonction de Sprague-Grundy de J_5 (indication: vous avez l'ensemble des positions du jeu dans l'arbre du point 1; calculer $f_{SG}^{J_5}$ à partir des positions sur les feuilles. Attention: il y moins de positions dans J_5 que de tableaux de 5 cases vides ou contenant un pion. Par exemple

	†	†	†	†
--	---	---	---	---

 n'est pas une position de J_5).
8. Calculer la valeur Sprague-Grundy de la position initiale de J_8 .