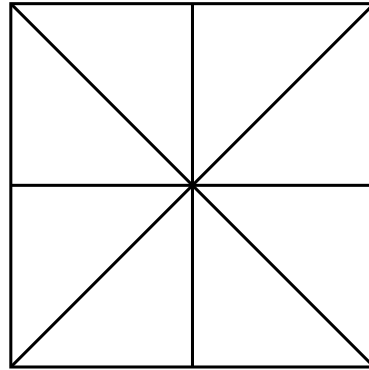
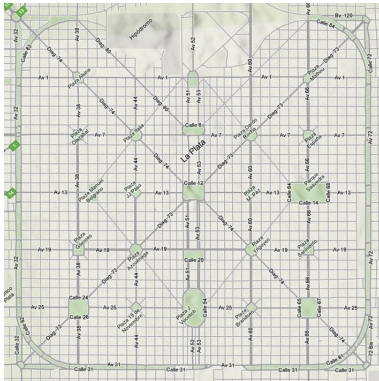


# M1 Informatique – Paris Diderot - Paris 7

## Introduction à l'Intelligence Artificielle

Examen partiel du 5 novembre 2015 - Durée: 2h00  
*Documents autorisés; le barème est donné à titre indicatif.*

### Exercice 1 (Lost in La Plata - 10 points)



A gauche, un plan de la ville de La Plata (Argentine). Nous modelisons le centre de cette ville par le plan de droite, dans lequel trois rues horizontales, trois verticales et deux diagonales s'intersectent en neuf carrefours.

Nous sommes confrontés au problème d'aller du point en haut à gauche au point en bas à droite du plan de droite. Un pas élémentaire consiste à passer d'un carrefour à un autre carrefour adjacent au premier, en parcourant une portion de rue horizontale, verticale ou diagonale. La longueur d'une portion de rue entre deux carrefours est de 100 mètres pour les rues horizontales et verticales, et de 141 mètres pour les rues diagonales. On veut minimiser la distance à parcourir.

1. Formuler ce problème comme un problème de recherche (ensemble d'états, état initial, test de finalité, fonction successeur, fonction de coût).

Dans le déroulement des différents algorithmes de recherche pour ce problème, vous allez appliquer l'optimisation qui consiste à ne pas réinstaller dans l'arbre de recherche les états se trouvant dans le chemin qui mène de la racine au noeud courant. Pour chaque algorithme, après avoir construit l'arbre de recherche, donner le nombre de noeuds développés et la solution trouvée.

2. Appliquer l'algorithme de recherche à coût uniforme à ce problème.
3. Donner une fonction heuristique admissible pour ce problème.
4. Appliquer les algorithmes glouton et  $A^*$  à ce problème, en utilisant la fonction heuristique du point précédent.
5. On généralise à présent le problème, en considérant un plan de ville où  $n$  rues horizontales,  $n$  verticales et deux diagonales s'intersectent en  $n^2$  carrefours. Donner une fonction heuristique admissible pour le problème de recherche d'un chemin du point en haut à droite à celui en bas à gauche.

6. Donner une heuristique admissible qui domine toutes les autres heuristiques admissibles pour ce problème (c.à.d. calculer le coût exact de chaque état).  
Combien y a-t-il de chemins optimaux à partir d'un état donné?
7. Le problème "Manhattan  $n \times n$ " est identique au problème "La Plata  $n \times n$ ", mais sans les rues diagonales.
  - (a) Est-ce que l'heuristique donnée au point 6 est admissible pour le problème "Manhattan  $n \times n$ "?
  - (b) Donner la fonction heuristique admissible dominant toutes les autre pour ce problème.
  - (c) Combien y a-t-il de chemins optimaux à partir d'un état donné dans ce problème?

## Exercice 2 (Composition séquentielle de jeux combinatoires - 10 points)

Soit  $J_1 = (\mathcal{P}_1, f_1)$  et  $J_2 = (\mathcal{P}_2, f_2)$  deux jeux combinatoires impartiaux et normaux. On note  $(J_1; J_2)$  le jeu impartial et normal  $(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2, f)$  où:

- $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \{(p_1, p_2) \mid p_1 \in \mathcal{P}_1 \text{ et } p_2 \in \mathcal{P}_2\},$
- $f(p_1, p_2) = \begin{cases} \{(p'_1, p_2) \mid p'_1 \in f_1(p_1)\} & \text{si } f_1(p_1) \neq \emptyset \\ \{(p_1, p'_2) \mid p'_2 \in f_2(p_2)\} & \text{si } f_1(p_1) = \emptyset \end{cases}$

Autrement dit, pour jouer au jeu  $(J_1; J_2)$  à partir de la position  $(p_1, p_2)$  on joue **d'abord** au jeu  $J_1$ , à partir de la position  $p_1$  puis, quand ce jeu **termine**, le joueur **perdant** commence à jouer à  $J_2$  à partir de  $p_2$ .

Soit  $S_n$  le jeu soustractif  $\{1, 2, 3, \dots, n\}^1$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  donné..

1. Donner l'ensemble de position gagnantes et l'ensemble de positions perdantes de  $S_n$ .
2. Donner une stratégie gagnante<sup>2</sup> pour le jeu  $S_3$  à partir de la position 11.
3. Donner une stratégie gagnante pour le jeu  $(S_3; S_3)$  à partir de la position  $(5, 4)$ .
4. Considérons à présent le jeu  $(S_2; S_2)$ . Soit  $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Partitionner les 16 éléments de  $\mathcal{P}$  en deux sous-ensembles : l'ensemble  $G$  des positions gagnantes pour le jeu  $(S_2; S_2)$  ; l'ensemble  $P$  des positions perdantes pour le jeu  $(S_2; S_2)$  . Dessiner un graphe orienté ayant  $\mathcal{P}$  comme ensemble de sommets, tel que:
  - chaque élément  $g \in G$  soit relié à l'élément de  $P$  atteignable dans le jeu  $(S_2; S_2)$  à partir de  $g$ , en un coup;

---

<sup>1</sup>Rappel: une position de ce jeu est un nombre naturel; jouer consiste en soustraire 1 ou 2 ou 3...ou  $n$  à la position courante, à condition qu'elle reste non négative.

<sup>2</sup>Rappel: une stratégie est un arbre dont:

- les noeuds sont des positions du jeu,
- la racine est la position de départ,
- les feuilles sont des positions finales,
- les fils d'un noeud sont des positions atteignables à partir du noeud en question,
- les noeud de hauteur pair ont exactement un fils
- les noeuds de hauteur impair ont autant des fils que de successeurs dans le jeu.

Une stratégie est gagnante si toutes les feuilles sont de hauteur impair.

- chaque élément de  $p \in P$  soit relié à tous les éléments atteignables dans le jeu  $(S_2; S_2)$  à partir de  $p$ , en un coup.
5. Considerons à présent deux jeux impartiaux et normaux  $J_1$  et  $J_2$ . Soient  $P_1, G_1, P_2, G_2$  et  $P, G$  les ensembles de positions perdantes et gagnantes des jeux  $J_1, J_2$  et  $(J_1; J_2)$  respectivement. Prouver ou réfuter chacune des affirmations suivantes<sup>3</sup>:
- (a) Si  $p_1 \in G_1$  et  $p_2 \in P_2$ , alors  $(p_1, p_2) \in G$ .
  - (b) Si  $p_1 \in P_1$  et  $p_2 \in G_2$ , alors  $(p_1, p_2) \in P$ .
  - (c) Si  $p_1 \in P_1$  et  $p_2 \in P_2$ , alors  $(p_1, p_2) \in P$ .
  - (d) Si  $p_1 \in G_1$  et  $p_2 \in G_2$ , alors  $(p_1, p_2) \in G$ .
6. Si  $J = (\mathcal{P}, f)$  et un jeu impartial et normal, la version *misère* de  $J$  s'obtient en prenant le même ensemble de positions  $\mathcal{P}$ , la même fonction de jeu  $f$ , mais en décrétant que les positions finales sont gagnantes.

La définition des ensembles  $G$  et  $P$  pour la version misère de  $J$  est donc:

- Si  $f(p) = \emptyset$  alors  $p \in G$ .
- Si pour tout  $p' \in f(p)$ ,  $p' \in G$  alors  $p \in P$ .
- S'il existe  $p' \in f(p)$  tel que  $p' \in P$  alors  $p \in G$ .

On utilise la notation  $J^M$  pour désigner la version misère du jeu  $J$ .

Donner les ensembles  $P^M$  et  $G^M$  des positions gagnantes et perdantes du jeu  $S_n^M$ .

7. Si  $J_1$  et  $J_2$  sont deux jeux impartiaux et normaux, soient  $P_1^M, G_1^M, P_2^M, G_2^M$  et  $P^M, G^M$  les ensembles de positions perdantes et gagnantes de  $J_1^M, J_2^M$  et  $(J_1; J_2)^M$  respectivement. Par ailleurs, soient  $P_1, G_1, P_2, G_2$  et  $P, G$  définis comme à la question 5.

Prouver les affirmations suivantes:

- (a) Si  $p_1 \in G_1^M$  et  $p_2 \in G_2$ , alors  $(p_1, p_2) \in G$ .
- (b) Si  $p_1 \in G_1$  et  $p_2 \in G_2^M$ , alors  $(p_1, p_2) \in G^M$ .

---

<sup>3</sup>Pour les preuves, un argument informel mais précis suffit. Pour les réfutations, il faut fournir un contre-exemple, qu'on pourra chercher par exemple dans le jeu  $(S_2; S_2)$ .