Examen Théorie et pratique de la concurrence

Mardi 29 juin 2010 (session 2)
Notes de cours et polycopié autorisés

Exercice 1 : Algorithme concurrent et diagramme d'états - 4 points

On considère les deux processus P1 et P2 décrits à la figure 1.

```
int A := 1, B := 10      // variables partagées

-- Processus P1                   -- Processus P2
p1: if (A >= 2) :                 q1: A := A + 1
p2:      B := B + 2               q2: B := B + 1
P3: await (B > 10)                q3: await (A <= 1)
P4: A := A - 1                    q4: B := B * 2
p5: end                           q5: end
```

FIGURE 1 – Algorithme de l'exercice 1

1. Dessiner le diagramme d'états de cet algorithme.
2. Est-ce que les formules LTL suivantes sont vérifiées par les exécutions (équitables) partant de l'état initial (p1,q1,A=1,B=10) : (justifier vos réponses)
   - $\Diamond\,(\mathsf{p5} \wedge \mathsf{q5})$
   - $\Big(\Box\,\neg \mathsf{p2}\Big) \Rightarrow \Big(\Diamond\,(\mathsf{B} \leqslant 24)\Big)$

Problème : CCS et Réseaux de Petri - 6 points

Dans cet exercice, on considère une suite de n pompiers qui font la chaîne pour éteindre un incendie, en se passant des seaux. Chaque pompier ne peut tenir qu'un seau à la fois : si il a déjà un seau, il doit d'abord le passer à son voisin de droite avant d'en prendre un autre donné par son voisin de gauche.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, le i-ème pompier est défini par le processus CSS P_i suivant :

$$P_i \stackrel{def}{=} p_{i-1,i} \cdot \overline{p_{i,i+1}}\ P_i$$

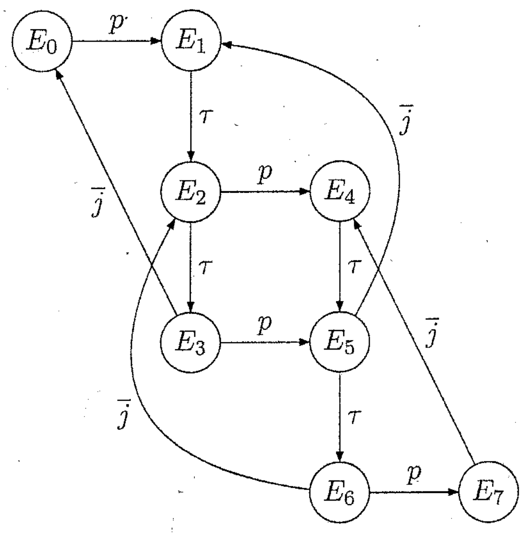
où $p_{i-1,i}$ correspond à l'action de prendre un seau du pompier $i-1$, pour $i > 1$, et $\overline{p_{i,i+1}}$ correspond à l'action de passer le seau au pompier $i+1$, pour $i < n$. Pour le premier pompier, on note simplement $p = p_{0,1}$ l'action correspondant à prendre le seau depuis le camion, et pour le dernier pompier, on note $\overline{j} = \overline{p_{n,n+1}}$ l'action correspondant à jeter l'eau sur le feu. Ainsi, pour $n = 2$, les deux pompiers sont définis par :

$$P_1 \stackrel{def}{=} p \cdot \overline{p_{1,2}}\ P_1 \quad \text{et} \quad P_2 \stackrel{def}{=} p_{1,2} \cdot \overline{j}\ P_2$$

1. Dessiner les systèmes de transitions de ces deux pompiers, ainsi que le système de transitions $\mathcal{T}_2$ associé au processus $(P_1 \| P_2) \setminus \{p_{1,2}\}$.
2. On considère maintenant trois pompiers :

$$P_1 \stackrel{def}{=} p \cdot \overline{p_{1,2}}\ P_1 \qquad P_2 \stackrel{def}{=} p_{1,2} \cdot \overline{p_{2,3}}\ P_2 \qquad P_3 \stackrel{def}{=} p_{2,3} \cdot \overline{j}\ P_3$$

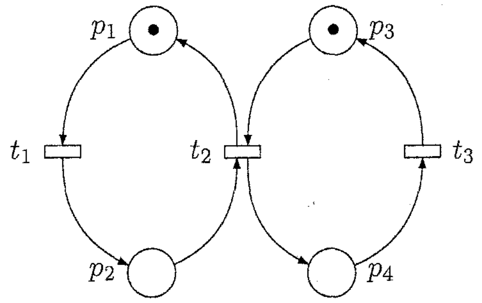
et le système de transitions $\mathcal{T}_3$ associé au processus $(P_1 \parallel P_2 \parallel P_3) \setminus K$, pour $K = \{p_{1,2}, p_{2,3}\}$.
Montrer que le processus $(P_1 \parallel P_2 \parallel P_3) \setminus K$ est bisimilaire à E_0 dans le système de transitions $\mathcal{T}_3'$ suivant :



3. Comment peut-on exprimer en LTL la propriété suivante :
Lorsqu'un seau est en circulation, de l'eau finira par être jetée sur le feu.

On supposera disposer d'une proposition `prendre-seau` correspondant à la prise d'un seau depuis le camion, et d'une proposition `jeter-seau` correspondant au fait de jeter un seau sur le feu.
Le système vérifie-t-il cette propriété ? (Justifier brièvement la réponse).
4. Dans cette question on s'intéresse à des pompiers maladroits... On suppose d'abord que chaque pompier peut renverser son seau (c.-à-d. le perdre). Ecrire le terme CCS P_i' correspondant à ce pompier "maladroit".
Est-ce que la propriété de la question précédente est toujours vraie ?

Ecrire le terme CCS P_i'' correspondant à un pompier "un peu maladroit" qui peut perdre son seau au plus une fois. Combien faut-il mettre de seaux en circulation pour garantir qu'au moins 10 seaux seront jetés sur le feu lorsque n pompiers "un peu maladroits" font la chaîne ?
5. On considère le réseau de Petri suivant $\mathcal{N}_2$:



Expliquer comment $\mathcal{N}_2$ peut s'interpréter comme deux pompiers se passant un seau. Donner la correspondance entre les transitions et les actions des processus précédents. Dessiner le graphe des marquages associé (en partant du marquage initial indiqué). Comment faut-il modifier les étiquettes du système de transitions obtenu pour qu'il soit bisimilaire (fortement) à $\mathcal{T}_2$?

6. Dessiner un réseau de Petri $\mathcal{N}_3$ pour trois pompiers.

Exercice 2 : CCS – 7 points (3/1/1/2)

1. Construire les systèmes de transitions étiquetées associés aux termes CCS suivants :
   - $P_1 \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot (a \cdot P_1 + b \cdot P_1)$
   - $P_2 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot P_2$
   - $P_3 \stackrel{\text{def}}{=} (P_1 \mid P_2)$
   - $P_4 \stackrel{\text{def}}{=} P_3 \backslash \{b\}$
   - $P_5 \stackrel{\text{def}}{=} P_3 \backslash \{a, b\}$
2. Est-ce que les états q_1, t_1 et s_1 des systèmes de transitions de la figure 2 sont bisimilaires ? Justifier votre réponse.

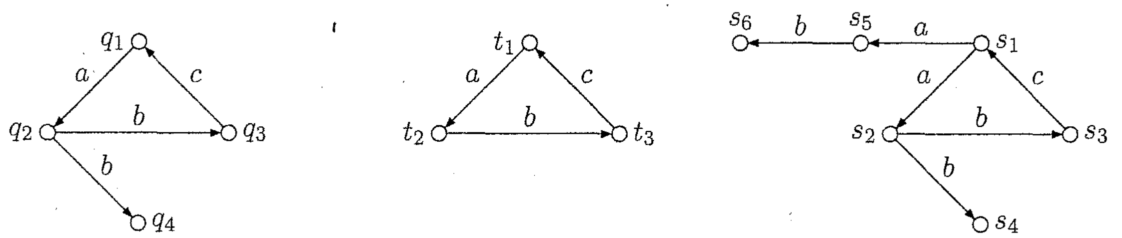


FIGURE 2 – Systèmes de transitions de la question 2

3. Est-ce que les états q_1, t_1 et s_1 des systèmes de transitions de la figure 3 sont bisimilaires ? Justifier votre réponse.

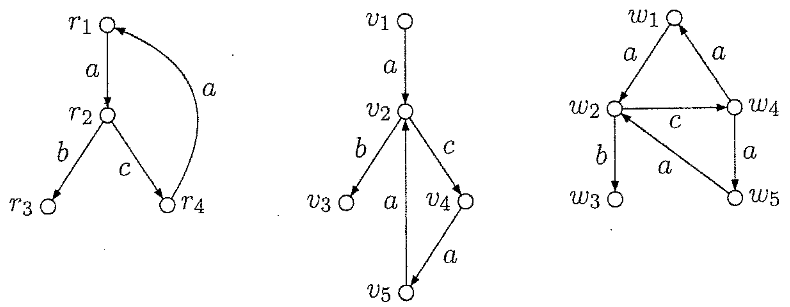


FIGURE 3 – Systèmes de transitions des questions 3 et 4 (b)

4. On considère les formules HML suivantes :
   - $\langle a\rangle[a]\bot$
   - $[a]\langle b\rangle\langle c\rangle\top$
   - $[a][b]\bot$
   - $[a]([b]\bot \vee [c]\bot)$

   Pour chacune d'elle, expliquer si elle est vraie pour les états q_1, t_1 et s_1 de la figure 2.
5. Donner une formule de HML qui est vraie en t_1 mais fausse en q_1 et en s_1.

Exercice 3 : Algorithme de la Boulangerie – 4 points

Montrer que les numéros utilisés par l'algorithme de la Boulangerie ne sont pas bornés. Donner un exemple.