université PARIS DIDEROT PARIS 7

Calculabilité et complexité

Examen Partiel
23 octobre 2016, 14h45-16h15

14h20-16h30.

Deux feuilles A4 recto verso sont autorisées. Les documents, livres, ou les documents provenant d'autres sources, électroniques ou autres, ne sont pas autorisés. Toute assertion doit être démontrée. Vous pouvez utiliser tout résultat vu en cours ou en TD sans donner de preuve.

Exercice 1 :

Rappelons que pour tout langage L, on dit que xR_Ly si et seulement si pour tout z, $xz \in L \iff yz \in L$.
Soit L_k le langage suivant sur l'alphabet $\{0, 1\}$, où k est un entier (prendre par exemple $k = 4$).

$L_k = \{u_1u_2...u_m \,|\, m \leqslant k$ et chaque u_i est composé soit uniquement de 0, soit uniquement de 1$\}$.

1. En passant par le théorème de Myhill Nerode, déterminer si L_4 est régulier. Si le nombre de classes d'équivalences est fini, donner une construction de l'automate qui est donné par le théorème de Myhill-Nerode. Si l'automate est trop grand pour dessiner, donner une description plus compacte. Si le nombre de classes est infini, pour avoir tous les points il faut trouver toutes les classes d'équivalence de L_4. (Pour avoir une partie des points vous pouvez montrer que le nombre de classes d'équivalences de L_4 est infini.)
2. Donner toutes les classes d'équivalences de L_k pour k quelconque. Démontrer que les classes données forment bien une partition en classes d'équivalences. Il n'est pas nécessaire de donner une preuve détaillée mais il faut préciser les propriétés nécessaires et détailler la preuve des principaux cas de figure. Une partie des points sera donnée si vous le faites dans le cas $k = 4$.

Exercice 2 :

On considère l'opération $L_1 \star L_2$ suivante.

$$L_1 \star L_2 = \{u \,|\, \exists v \in L_1 \, uv \in L_2\}$$

Un mot u est dans $L_1 \star L_2$ si il existe un mot $v \in L_1$ tel que $uv \in L_2$. Montrer que les langages énumérables sont fermés sous $\star$.

Exercice 3 :

Soit $L = \{\langle M_1, M_2\rangle : M_1, M_2$ sont des machines de Turing, $L(M_1) \subseteq L(M_2)\}$.

1. L est-il décidable ?
2. $\overline{L}$ est-il décidable ?
3. L est-il énumérable ?
4. $\overline{L}$ est-il énumérable ?

$\overline{L}$ dénote le complément de L. Donner une démonstration dans tous les cas, pas nécessairement dans l'ordre demandé.