

Calculabilité et complexité

Examen final

8 janvier 2018, 15h30-18h30

Deux feuilles A4 recto-verso sont autorisées. Les livres ou documents provenant d'une quelconque source (électronique ou autre) ne sont pas autorisés. Toute assertion doit être démontrée. Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser tout résultat vu en cours ou en TD sans donner de preuve.

Exercice 1 : (4 points)

On considère l'opération $L_1 \rightarrow L_2$ sur deux langages définie par

$$x \in L_1 \rightarrow L_2 \text{ si et seulement si } x \in L_1 \text{ implique } x \in L_2.$$

1. Montrer que les langages réguliers sont clos sous \rightarrow .
2. Montrer que les langages décidables sont clos sous \rightarrow .
3. Montrer que les langages énumérables ne sont pas clos sous \rightarrow .

Exercice 2 : (3 points)

On a vu en cours que les langages réguliers sont clos sous union. Si un langage L a m classes d'équivalence et le langage L' a n classes d'équivalence, que peut-on dire sur le nombre de classes d'équivalence du langage $L \cup L'$? Donner une borne supérieure en fonction de n et m . Donner un exemple où cette borne n'est pas atteinte.

Exercice 3 : (4 points)

Soit $c > 0$ une constante.

1. Montrer que $\text{NTIME}(n^c) \subseteq \text{P} \implies \text{NP} = \text{P}$.
2. En déduire que $\text{NTIME}(n^c) \neq \text{P}$.

Exercice 4 : (6 points)

Soit Third3SAT le problème suivant :

- **entrée** : une formule booléenne $\phi(x_1, \dots, x_k)$ en 3-CNF dont le nombre de clauses est un multiple de trois;
- **question** : existe-t-il une affectation $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ des variables satisfaisant *exactement* le tiers des clauses de ϕ ?

1. Montrer que Third3SAT est NP-complet.

Indication : on pourra donner une réduction consistant à ajouter un certain nombre de fois une même nouvelle clause.

On considère maintenant le problème Half3SAT suivant :

- **entrée** : une formule booléenne $\phi(x_1, \dots, x_k)$ en 3-CNF contenant un nombre pair de clauses ;
- **question** : existe-t-il une affectation $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ des variables satisfaisant *exactement* la moitié des clauses de ϕ ?
- 2. Si $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est une formule en 3-CNF, montrer ^{que s'il} qu'il existe $(a_1, \dots, a_k) \in \{0, 1\}^k$ ne satisfaisant *aucune* clause ^{alors} $\phi \in 3SAT$.
- 3. Montrer que Half3SAT est NP-complet.

Indication : pourquoi doit-on cette fois-ci utiliser la question 2 ?

Exercice 5 : (3 points)

Soit DEG le problème suivant :

- **entrée** : un entier $d \in \mathbb{N}$ et un graphe non orienté G donné par sa matrice d'adjacence ;
- **question** : G possède-t-il un sommet de degré $\geq d$?

Montrer que $DEG \in L$.