Calculabilité et complexité

Examen final
9 janvier 2017, 15h30-18h30

Deux feuilles A4 recto verso sont autorisées. Les documents, livres, ou les documents provenant d'autres sources, électroniques ou autres, ne sont pas autorisés. Toute assertion doit être démontrée. Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser tout résultat vu en cours ou en TD sans donner de preuve.

Exercice 1 : (4 points)

Rappelons que pour tout langage L, on dit que xR_Ly si et seulement si pour tout z, $xz \in L \iff yz \in L$.
Soit L_{10} le langage suivant sur l'alphabet $\{0, 1, \#\}$.

$$L_{10} = \{0^n\#u \text{ où } 0 \leqslant n \leqslant 10 \text{ est un entier et } u \text{ est un mot quelconque de } n \text{ lettres.}\}$$

Par exemple, $00000\#01101 \in L_{10}$, $000\#111 \in L_{10}$ mais $00\#111110011 \notin L_{10}$ et $10\#11 \notin L_{10}$.

1. Donner les classes d'équivalence de $R_{L_{10}}$. Démontrer uniquement que les éléments de classes différentes sont inéquivalents sous $R_{L_{10}}$.
2. Si le nombre de classes d'équivalences est fini, donner une construction de l'automate qui est donné par le théorème de Myhill-Nerode. Si l'automate est trop grand pour dessiner, en donner une description plus compacte. Si le nombre de classes est infini, pour avoir tous les points il faut trouver toutes les classes d'équivalence (et démontrer que c'est correct). Pour avoir une partie des points vous pouvez montrer que le nombre de classes d'équivalences est infini.

Exercice 2 : (4 points)

Le langage A_{TM} est défini par $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle | M$ est une machine de Turing qui sur entrée w s'arrête et accepte$\}$. Soit $L = \{\langle M\rangle : M$ est une machine de Turing, et M sur entrée $\langle M\rangle$ accepte $\}$.

1. Montrer que L est indécidable. (Indication : une preuve directe est suggérée plutôt que de donner une réduction à partir d'un autre problème.)
2. Montrer que $L \leqslant A_{TM}$ en donnant une réduction.
3. L est-il énumérable ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : (4 points)

On définit les deux problèmes NP-complets suivants.

HITTINGSET En entrée, une famille d'ensembles d'entiers $E_1, \ldots E_m$, et un seuil k. En sortie, VRAI s'il existe un ensemble H de taille k qui intersecte tous les ensembles $E_1, \ldots, E_m$, FAUX Sinon.

VERTEXCOVER En entrée, un graphe G et un seuil s. En sortie, VRAI s'il existe un ensemble de sommets U de taille s qui couvre toutes les arêtes du graphe G, FAUX sinon.

Montrer que VERTEXCOVER se réduit en temps polynomial à HITTINGSET.

Exercice 4 : (4 points)

Le problème $k-COL$ est défini comme l'ensemble des graphes G admettant une k-coloration. Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai, faux, s'il implique $P = NP$, ou s'il implique $P \neq NP$. Donner une preuve complète de votre assertion.

1. Quel que soit $k \geqslant 2$, $k-COL \leqslant_p (k+1)-COL$.
2. Quel que soit $k \geqslant 2$, $(k+1)-COL \leqslant_p k-COL$.

Exercice 5 : (4 points)

Un graphe orienté est k-régulier si chaque sommet a k arêtes sortantes (degré sortant $=$ k pour chaque sommet du graphe). Soit $R = \{\langle k, G\rangle : k$ est un entier codé en binaire et G est un graphe k-régulier$\}$. Le graphe G est présenté sous forme de matrice d'adjacence. Parmi les classes de complexité vues en cours, laquelle contient R ? Donner la plus petite classe pour laquelle vous pouvez donner une preuve (et donner la preuve).