Examen de calculabilité et complexité

M1 informatique – 2h30

Le 11 janvier 2016

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*
Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie, ou est-elle fausse ? Ne justifiez pas vos réponses. On comptera $+\frac{1}{2}$ point par bonne réponse, $-\frac{1}{4}$ point par mauvaise réponse, et 0 pour une absence de réponse. Si le total est négatif, on donnera 0 à l'exercice.

1. Si A et B sont des langages indécidables, alors $A \cap B$ est indécidable.
2. Si A est un langage indécidable, alors $\overline{A}$ est indécidable. f
3. Le complémentaire d'un ensemble fini est décidable. f
4. On sait simuler une machine de Turing non déterministe par une machine de Turing déterministe avec une perte de temps quadratique. V
5. Le problème `SAT` est décidable. V
6. On peut décider le problème `CLIQUE` en temps exponentiel. V
7. Il existe un langage de $\mathsf{DTIME}(2^{10n})$ qui n'est pas dans $\mathsf{DTIME}(2^{2n})$.
8. Si $A \leqslant_m^p$ `SAT` et `SAT` $\leqslant_m^p A$ alors A est NP-complet. V

Exercice 2 *Langages réguliers*
On considère l'opération $\mathcal{D}$ qui « double » un langage, définie comme suit. Pour tout langage $L \subseteq \{0,1\}^*$, le langage $\mathcal{D}(L)$ est :

$$\mathcal{D}(L) = \{w1w : w \in L\}.$$

Les langages réguliers sont-ils fermés sous l'opération $\mathcal{D}$? Si oui, démontrez-le. Si non, donnez un langage L, montrez qu'il est régulier et montrez que $\mathcal{D}(L)$ n'est pas régulier.

Exercice 3 `HalfClique`
Soit `HalfClique` le problème suivant :

Entrée : un graphe non orienté G à n sommets.

Question : G a-t-il une clique de taille $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$?

Montrer que `HalfClique` est NP-complet.

fct calculable en temps poly

$\lfloor\ \rfloor$ = partie entière inférieur

Exercice 4 *Ensemble dominant*
On rappelle que CS (*Couverture par Sommets*) est le problème NP-complet suivant :

Entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier k.

Question : existe-t-il un sous-ensemble de S de taille k couvrant toutes les arêtes de G ?

(On dit qu'un sommet s couvre une arête a si s est l'une des extrémités de a.)

Soit ED (*Ensemble Dominant*) le problème suivant :

Entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier k.

Question : existe-t-il un sous-ensemble dominant de S de taille k ?

(Un ensemble de sommets $\{u_1, \ldots, u_k\}$ est *dominant* si pour tout autre sommet v, il existe i tel que $(u_i, v) \in A$.)

G connexe

1. Montrer qu'une couverture par sommets est toujours un ensemble dominant.
2. Donner un exemple simple d'ensemble dominant qui ne soit pas une couverture par sommets.
3. Montrer que le problème ED est NP-complet.
   Indication : donner une réduction de CS en construisant un nouveau graphe dont l'ensemble des sommets est $S \cup A$.

Exercice 5 *Padding*
On rappelle que

$$\mathsf{EXP} = \mathsf{DTIME}(2^{n^{O(1)}}) \quad \text{et} \quad \mathsf{E} = \mathsf{DTIME}(2^{O(n)}).$$

Pour un langage A et une constante $c > 1$, on note A_c le langage suivant :

$$A_c = \{(x, 1^{|x|^c}) \mid x \in A\}.$$

1. Montrer que si $A \in \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$, alors $A_c \in \mathsf{E}$.
   Indication : l'entrée du langage A étant plus grande, on dispose de plus de temps pour faire les calculs.
2. Montrer que si $A_c \in \mathsf{NP}$, alors $A \in \mathsf{NP}$.
3. En déduire que, si $\mathsf{E} = \mathsf{NP}$, alors $\mathsf{EXP} = \mathsf{NP}$, et donc $\mathsf{EXP} = \mathsf{E}$.
4. En déduire que $\mathsf{E} \neq \mathsf{NP}$.