

Exercice :

Soit γ la fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par : $\gamma(n, p) = 2^{n+p+1} + 2^p$.

Question 1 : Montrer que γ est une injection.

Question 2 : Donner une méthode de calcul de la fonction $\delta_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\delta_2(m) = p \iff \exists n$ tel que $\gamma(n, p) = m$. Donner une méthode de calcul de la fonction $\delta_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\delta_1(m) = n \iff \exists p$ tel que $\gamma(n, p) = m$.

Question 3 : Montrer que γ , δ_1 et δ_2 sont primitives récurrentes.

Problème :

Soit A l'alphabet $\{a, b\}$. Si x est un entier de $\mathbb{Z}$, on associe à cet entier relatif une représentation par un mot de A^* , notée $\rho(x)$, ainsi définie :

— si $x = 0$, alors x est représenté par le mot vide (i.e. le mot constitué d'aucune lettre)

— si $x > 0$, alors x est représenté selon une écriture binaire de x , la lettre a étant comprise comme un 1 et la lettre b comme un 0 (et donc $\rho(x)$ commence par un a)

— si $x < 0$, alors x est représenté selon une écriture binaire de $-x$, mais cette fois la lettre a étant comprise comme un 0 et la lettre b comme un 1 (et donc $\rho(x)$ commence par un b).

Question 1 : Quelle est la représentation de 5 ? Celle de -5 ? Vérifiez que tout élément de $\mathbb{Z}$ possède une unique représentation, et que tout mot de A^* est la représentation d'un élément de $\mathbb{Z}$.

Question 2 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\# \rho(x) \#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\# \rho(x+1) \#$.

Question 3 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\# \rho(x) \#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\# \rho(x-1) \#$.

Question 4 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\# g \# \rho(x) \#$ (où $g \in A^*$ et $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\# g' \# w \#$ où :

— si g est le mot vide, alors $g' = g$ et $w = \rho(x)$ (rien n'est changé)

— si $g = ag'$ (i.e. g commence par la lettre a), alors $w = \rho(x+1)$

— si $g = bg'$ (i.e. g commence par la lettre b), alors $w = \rho(x-1)$

On définit maintenant un homomorphisme π de A^* dans $\mathbb{Z}$ par : $\pi(a) = 1$ et $\pi(b) = -1$. Autrement dit, pour tout mot $w \in A^*$, on a $\pi(w) = |w|_a - |w|_b$, le nombre de a dans w minoré du nombre de b dans w .

Question 5 : Construire une machine de Turing qui réalise la fonction $\rho \circ \pi$ de A^* dans A^* .

Question 6 : Construire une machine de Turing t_L qui reconnaît le langage :
 $L = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0\}$.

Question 7 : Construire une machine de Turing t_M qui reconnaît le langage :
 $M = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0 \text{ et } \forall h \text{ préfixe de } g, \pi(h) \geq 0\}$.