Université Paris 7-Denis Diderot
M1 d'Informatique
UE Calculabilité et complexité

Examen du 9 novembre 2005
— Durée 2 h —
tous documents autorisés

Problème I (noté sur 5 points) :

On considère la machine RAM de programme :

1	LIRE	1
2	CHARGER A:	0
3	RANGER	2
4	INCREMENTER	2
5	CHARGER	2
6	MULTIPLIER	2
7	RANGER	3
8	CHARGER	1
9	SOUSTRAIRE	3
10	SAUTSIPOSITIF	4
11	ECRIRE	2
12	ARRET	

Question 1 : Effectuer le calcul de cette RAM pour chacune des valeurs suivantes de la donnée : 1, 2, 3, 4, 5.

Question 2 : Quelle est la fonction φ réalisée par cette RAM ?

Problème II (noté sur 15 points) :

Soit A l'alphabet $\{a, b\}$. Si x est un entier de $\mathbb{Z}$, on associe à cet entier relatif une représentation par un mot de A^*, notée $\rho(x)$, ainsi définie :
— si $x = 0$, alors x est représenté par le mot vide (*i.e.* le mot constitué d'aucune lettre)
— si $x > 0$, alors x est représenté selon une écriture binaire de x, la lettre a étant comprise comme un 1 et la lettre b comme un 0 (et donc $\rho(x)$ commence par un a)
— si $x < 0$, alors x est représenté selon une écriture binaire de $-x$, mais cette fois la lettre a étant comprise comme un 0 et la lettre b comme un 1 (et donc $\rho(x)$ commence par un b).

Question 1 : Quelle est la représentation de 5 ? Celle de -5 ? Vérifiez que tout élément de $\mathbb{Z}$ possède une unique représentation, et que tout mot de A^* est la représentation d'un élément de $\mathbb{Z}$.

Question 2 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\#\rho(x)\#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\#\rho(x+1)\#$.

Question 3 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\#\rho(x)\#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\#\rho(x-1)\#$.

Question 4 : Construire une machine de Turing qui, ayant au départ sur sa bande $\#g\#\rho(x)\#$ (où $g \in A^*$ et $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec pour résultat de son calcul $\#g'\#w\#$ où :
— si g est le mot vide, alors $g' = g$ et $w = \rho(x)$ (rien n'est changé)
— si $g = ag'$ (*i.e.* g commence par la lettre a), alors $w = \rho(x+1)$
— si $g = bg'$ (*i.e.* g commence par la lettre b), alors $w = \rho(x-1)$

On définit maintenant un homomorphisme π de A^* dans $\mathbb{Z}$ par : $\pi(a) = 1$ et $\pi(b) = -1$. Autement dit, pour tout mot $w \in A^*$, on a $\pi(w) = |w|_a - |w|_b$, le nombre de a dans w minoré du nombre de b dans w.

Question 5 : Construire une machine de Turing qui réalise la fonction $\rho \circ \pi$ de A^* dans A^*.

Question 6 : Construire une machine de Turing t_L qui reconnaît le langage :
$L = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0\}$.

Question 7 : Construire une machine de Turing t_M qui reconnaît le langage :
$M = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0 \text{ et } \forall h \text{ préfixe de } g, \pi(h) \geq 0\}$.