Université Paris 7-Denis Diderot
M1 d'Informatique
UE Calculabilité et complexité

Examen du 7 janvier 2009
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Exercice I :

On considère la machine RAM de programme :

1	LIRE	1	11	AJOUTER	4
2	CHARGER A:	0	12	RANGER	5
3	RANGER	3	13	CHARGER	4
4	CHARGER A:	1	14	RANGER	3
5	RANGER	2	15	CHARGER	5
6	RANGER	4	16	RANGER	4
7	CHARGER	1	17	INCREMENTER	2
8	SOUSTRAIRE	2	18	ALLERA	7
9	SAUTSIZERO	19	19	ECRIRE	4
10	CHARGER	3	20	ARRET	

Question : Effectuer le calcul de cette RAM pour chacune des valeurs suivantes de la donnée : 1, 2, 3, 4. Réécrire ce programme en langage impératif évolué. Quelle est la fonction φ réalisée par cette RAM ?

Exercice II :

On considère le langage L sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ suivant :

$$L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a, b\}^* \; et \; w \neq w'\}$$

Question : Démontrer que $L \in DESPACE(logn)$.

Problème :

Un automate à file $\mathcal{A}$ sur un alphabet A est un 5-uple (Z, S, T, i, K) où Z est un alphabet dit alphabet de file, $S = \{s_1, \ldots, s_p\}$ est un ensemble fini d'états, et T est un ensemble fini de règles de la forme $y, s, z \longrightarrow h, s'$ avec $y \in A \cup \{1\}$, $s, s' \in S$, $z \in Z \cup \{1\}$ et $h \in Z^*$; enfin $i \in S \times Z$ est la configuration interne de départ, et $K \subset S \times Z^*$ est l'ensemble des configurations internes d'acceptation.

Une configuration de $\mathcal{A}$ est un triple $(f, q, h) \in A^* \times S \times Z^*$, f est la partie du mot qui doit être lue, et (q, h) est la configuration interne de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que s est l'état courant et h est le contenu de la file. Il existe une transition selon $\mathcal{A}$ entre la configuration c et la configuration c' si $c = (yf, s, zu)$, $c' = (f, s', uh)$ et $y, s, z \longrightarrow h, s' \in T$, ce qui est noté $c \vdash c'$. Un calcul valide de longueur n est la composée de n transitions, et un calcul valide est un valcul valide d'une longueur quelconque.

Un mot f est reconnu par $\mathcal{A}$ si il existe un calcul valide $(f, s_1, z_1) \vdash^* (1, s, h)$ où $i = (s_1, z_1)$ et $(s, h) \in K$. Le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est l'ensemble des mots qu'il reconnaît.

Etant donné une machine de Turing $t =< A, Q, P >$ qui possède un unique état q_a tel qu'un calcul s'arrête si et seulement si l'état courant est q_a, on construit à partir de t un automate à file de règles :

$$
\begin{array}{llll}
1, s_1, z_1 & \longrightarrow & \#\Box q_1, s_2 & \\
x, s_2, 1 & \longrightarrow & x, s_2 & \text{pour } x \in A \\
1, s_2, \# & \longrightarrow & \#, s_3 & \\
1, s_3, y & \longrightarrow & 1, s_y & \text{pour } y \in A \cup \{\Box\} \\
1, s_y, z & \longrightarrow & y, s_z & \text{pour } y, z \in A \cup \{\Box\} \\
1, s_y, q & \longrightarrow & 1, s_{y,q} & \text{pour } y \in A \cup \{\Box\} \text{ et } q \in Q \\
1, s_3, q & \longrightarrow & 1, s_{\Box,q} & \text{pour } q \in Q \\
1, s_{y,q}, x & \longrightarrow & yx'q', s_4 & \text{si } q, x \longrightarrow x', D, q' \in P \\
1, s_{y,q}, x & \longrightarrow & q'yx', s_4 & \text{si } q, x \longrightarrow x', G, q' \in P \\
1, s_4, x & \longrightarrow & x, s_4 & \text{pour } x \in A \cup \{\Box\} \\
1, s_4, \# & \longrightarrow & \#, s_3 & \\
1, s_{y,q}, \# & \longrightarrow & yx'q'\Box\#, s_3 & \text{si } q, \Box \longrightarrow x', D, q' \in P \\
1, s_{y,q}, \# & \longrightarrow & q'yx'\#, s_3 & \text{si } q, \Box \longrightarrow x', G, q' \in P
\end{array}
$$

et on pose $K = \{(s, h) \mid s = s_{y,q_a}\}$.

Question 1 : Vérifier que si $(f, s_1, z_1) \vdash^* (1, s, h)$ où $(s, h) \in K$ est un calcul valide, celui-ci se décompose en :
$(f, s_1, z_1) \vdash^* (1, s_3, m_1) \vdash^* (1, s_3, m_2) \ldots \vdash^* (1, s_3, m_r) \vdash^* (1, s, h)$ où l'on a mis en évidence toutes les occurrences d'une configuration contenant s_3.
Montrer que dans ces conditions $m_1 = \Box q_1 f\#$ et $\forall i, m_i \in (A \cup \{\Box\})^* Q (A \cup \{\Box\})^* \#$.

Question 2 : Montrer que si $m = uqv$ représente une configuration de la machine de Turing t avec les conventions usuelles : u est la partie utile du mot sur la bande à gauche de la tête de lecture-écriture, v est la partie utile du reste du mot sur la bande, et q est l'état courant, et $suiv(m)$ représente avec les mêmes conventions la configuration de la machine de Turing t atteinte à partir de m en une transition, alors pour tout i tel que $1 \leq i < r$ on a $m_i = m'_i\# \Longrightarrow m_{i+1} = suiv(m'_i)\#$.

Question 3 : En déduire que si f est reconnu par cet automate à file, f est reconnu par la machine de Turing t. Vérifier la réciproque.

On considère le problème suivant :

Problème : reconnaissance par automate à file

Donnée : Un automate à file $\mathcal{A} = (Z, S, T, i, K)$ sur un alphabet A et un mot f sur A ;
Question : Le mot f est-il reconnu par l'automate à file $\mathcal{A}$?

Question 4 : Montrer que ce problème est indécidable.