Automates avancés et applications

Master 1

Examen du 16 mai 2018 (12h-15h)
documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif.

1 Applications des cours

1.1 Automates à pile - $\boxed{2}$

Trouvez un automate à pile qui reconnait le langage $U = \{a^i b^j c^k | i = j \vee j = k\}$ vu en partiel. Précisez s'il le reconnait par pile vide ou état final.

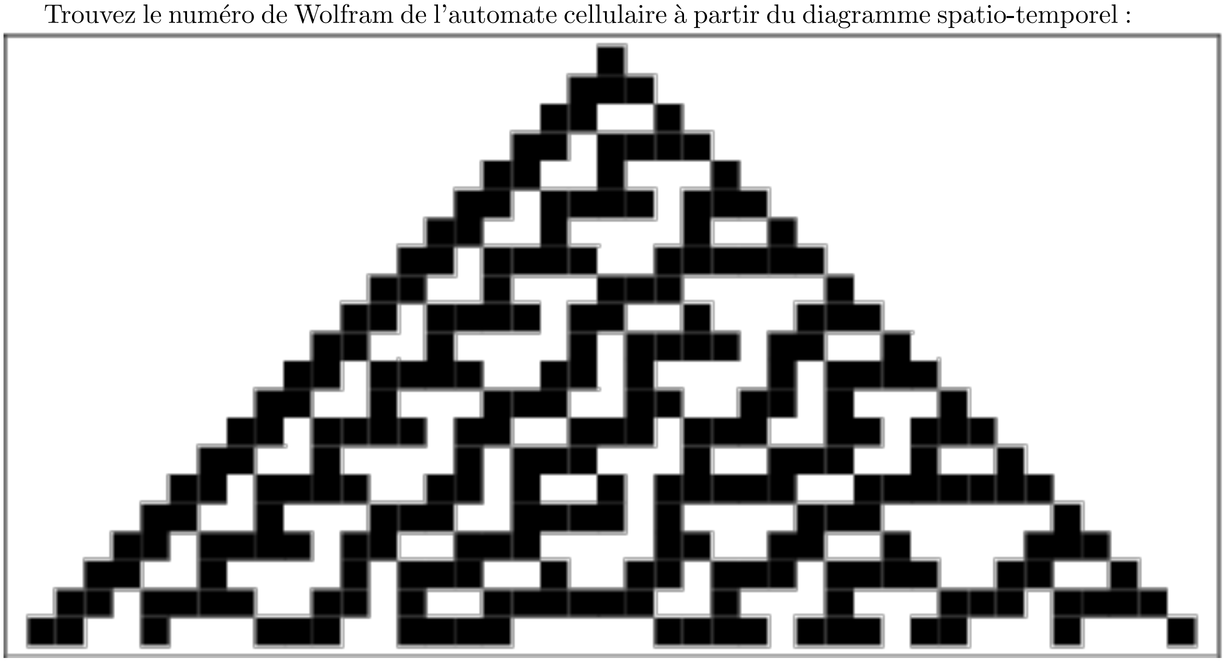
1.2 Mots infinis - $\boxed{3}$

Trouvez un automate de Büchi et une expression ω-régulière pour les ω-langages sur $\{a, b\}$ suivants :

- tous les mots qui contiennent un nombre infini de b sur des positions paires.
- tous les mots qui contiennent un nombre infini de b sur des positions paires et un nombre infini de a sur des positions impaires.

1.3 Automates cellulaires - $\boxed{2}$

Trouvez le numéro de Wolfram de l'automate cellulaire à partir du diagramme spatio-temporel :



Possède-t-il des jumeaux ? Un Jardin d'Eden ? Justifiez.

2 Des petits raisonnements

2.1 On analyse un langage $\boxed{2}$

Pour le langage L de tous les mots sur $\{1, 2, 3\}$ avec le même nombre de chaque chiffre (p.ex. 311212323 contient 3 de chaque et appartient donc à L) :
— démontrez qu'il n'est pas hors contexte ;
— donnez une grammaire qui l'engendre.

2.2 On utilise les automates à pile $\boxed{2}$

Démontrez que l'intersection d'un langage hors contexte et un langage régulier est hors contexte.

2.3 Mots périodiques et leurs applications - $\boxed{4}$

On propose une méthode faible mais très simple pour prouver qu'un ω-langage n'est pas ω-régulier. N'oubliez pas de justifier vos assertions.

1. $\boxed{1}$ Démontrez que chaque langage ω-régulier non-vide contient un mot ultimement périodique (c-à-d de la forme uv^ω).
2. $\boxed{1}$ Donnez une borne sur la taille de u et de v, en complétant l'énoncé et en démontrant le lemme suivant :

   Lemme 1 *Soit $\mathcal{A}$ un automate de Büchi avec n états, acceptant au moins un mot infini. Alors il existe deux mots finis u et v, de taille inférieure à ..., tels que ...*
3. $\boxed{1}$ Donnez un exemple de langage ω-régulier, qui ne peut être reconnu par aucun automate de Büchi avec moins de 1000 états. Justifiez.
4. $\boxed{1}$ Donnez un exemple de langage non-ω-régulier de mots infinis. Justifiez.

3 Toute une théorie : mots bi-infinis $\boxed{15}$

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ un automate fini (I, F sont deux ensembles d'états). Un calcul sur un mot bi-infini $\dots a_{-1}a_0a_1 \dots$ est une suite bi-infinie

$$\cdots q_{-1} \xrightarrow{a_{-1}} q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \cdots$$

telle que : $\forall i, (q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta$. Un calcul est *accepteur* s'il existe une infinité de $i \leq 0$ tels que $q_i \in I$ et une infinité de $i \geq 0$ tels que $q_i \in F$. Un mot bi-infini est *reconnu* par l'automate $\mathcal{A}$ s'il possède un calcul accepteur. On définit de façon immédiate les langages *reconnaissables* de mots bi-infinis sur un alphabet Σ.

1. Donnez les automates sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui reconnaissent les langages de mots bi-infinis suivants :
   (a) $\boxed{1}$ le seul mot $\dots abababababab \dots$;
   (b) $\boxed{1}$ tous les mots avec un nombre fini de a ;
   (c) $\boxed{2}$ tous les mots avec un nombre infini de b.
2. $\boxed{2}$ Soit L_0 l'ensemble de tous les mots bi-infinis sur $\{a, b\}$ avec la lettre a en position 0. Est-il reconnaissable (justifiez) ?
3. $\boxed{1}$ Montrez que les langages bi-infinis reconnaissables sont clos par union.
4. $\boxed{3}$ Définissez (formellement) les expressions régulières bi-infinies (BRE) et leur sémantique. Donnez des BRE pour les langages du premier point de cet exercice.
5. $\boxed{5}$ Démontrez qu'un langage de mots bi-infinis est reconnaissable si et seulement si il peut être exprimé par une BRE.