

Automates avancés et applications

Master 1

Devoir surveillé du 13 mars 2019 (10h45-12h45)

Document autorisé : une feuille manuscrite A4 recto; le barème est indicatif.

1 Application des cours

1. ☐ 2 Vérifiez avec l'algorithme du cours que la formule suivante est fausse pour les nombres naturels : $\exists x (x + x = x \wedge x \neq 0)$.
2. ☐ 2 Mettez la grammaire suivante en forme normale de Chomsky :

$$S \rightarrow AaA$$

$$A \rightarrow bA|B$$

$$B \rightarrow \varepsilon$$

2 Un langage

Soit la grammaire

$$S \rightarrow SABC|\varepsilon$$

$$AB \rightarrow BA$$

$$AC \rightarrow CA$$

$$BC \rightarrow CB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

$$C \rightarrow c$$

$$BA \rightarrow AB$$

$$CA \rightarrow AC$$

$$CB \rightarrow BC$$

1. ☐ 0.5 De quel type est cette grammaire ?
2. ☐ 0.5 Dérivez cab
3. ☐ 1 Décrivez le langage engendré.
4. ☐ 2 Trouvez une grammaire hors contexte équivalente ou prouvez qu'il n'y en a pas.

il y a pas

3 Un BDD

On définit la fonction booléenne $1 \bmod 3$ de n arguments comme ceci : $1 \bmod 3(b_1, \dots, b_n)$ est vraie si le nombre de bits vrais est congru à 1 modulo 3¹. Trouvez le ROBDD pour cette fonction :

1. ☐ 1 faites un dessin détaillé ;
2. ☐ 1 expliquez pourquoi votre diagramme calcule la fonction souhaitée ;
3. ☐ 1 expliquez pourquoi il est réduit.

1. c'est à dire peut être écrit comme $3k + 1$

Nb 4 Une étude théorique : Presburger contre Peano

L'objectif de cet exercice consiste à comparer l'expressivité de l'arithmétique de Presburger (avec addition seulement) et celle de Peano (avec addition et multiplication).

On introduit plusieurs prédicats sur $\mathbb{N}$:

Central pour cette étude : le prédicat $A(x)$ sur les entiers, qui représente la propriété x est la somme d'une puissance de 2 supérieure à 1 et de son carré.

Auxiliaire 1 : $Pu(x)$ (x est une puissance de 2).

Auxiliaire 2 : $C(x, y)$ qui signifie que $x = y^2$ (x est le carré de y).

On rappelle que dans le cours on a associé à chaque prédicat n -aire Q sur $\mathbb{N}$ un langage L_Q dans l'alphabet $\{0, 1\}^n$.

1. [1] Montrez que le langage L_{Pu} associé au prédicat $Pu(x)$ est régulier en exhibant un automate qui reconnaît ce langage.
2. [1] Exprimez $A(x)$ par une formule $\varphi_A(x)$ dans l'arithmétique de Presburger augmentée des prédicats $Pu(x)$ et $C(x, y)$.
3. [1] Décrivez le langage L_A associé au prédicat A défini ci-dessus. Indication: commencez par quelques exemples tels que $2 + 2^2, 8 + 8^2, 1024 + 1024^2$
4. [1] Le langage L_A est-il régulier? Justifiez votre réponse par la méthode de votre choix.
5. [2] Que pouvez-vous en déduire quant au langage L_C ? Le prédicat C est-il exprimable en arithmétique de Presburger? Indication: justifiez soigneusement
6. [1] Exprimez C en arithmétique de Peano. Comparez le pouvoir expressif de l'arithmétique de Presburger et de celle de Peano.

5 Défi : Automates à file — preuve de l'indécidabilité

Une file (FIFO) est un modèle de mémoire capable de stocker une chaîne de caractères d'un alphabet, avec deux opérations : **enfiler**($a: \text{char}$), qui ajoute a dans la file en tant que le dernier élément et **défiler**() : char qui lit le premier élément et l'enlève de la file (si la file est vide cette fonction retourne 0). Un automate à file (AàF) a un ensemble fini d'états de contrôle et une seule file, sur laquelle il peut enfiler et défiler les caractères à volonté. Le mot d'entrée w est représentée par la file initialisée à w . Le mot est accepté si l'automate arrive à un état final.

1. [2] Décrire l'AàF qui reconnaît $\{a^n b^n\}$
2. [4] Simuler une machine de Turing avec un AàF. Indication: Comment représenter une configuration de MT? Comment traduire chaque instruction de MT
3. [2] Montrer que tout langage L semi-décidable peut être reconnu par un AàF
4. [1] Le problème de mot pour AàF est le suivant : étant donnés un AàF A et un mot w , décider si $w \in L(A)$. Prouver que ce problème de mot n'est pas décidable.