

Master Ingénierie Informatique, Université Paris Diderot.

Automates Avancés. 28 Juin 2013

Durée : 2h. Documents manuscrits autorisés. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 :

Considérer la grammaire hors-contexte $G = (VT = \{a,b,c,d\}, VN = \{S, A, B, C, D\}, S, P)$ où P est l'ensemble de productions suivant :

$S \Rightarrow ABC$ $A \rightarrow aA \mid c$ $B \rightarrow b$ $C \rightarrow Cc \mid a$ $D \rightarrow BD \mid d$

Question : Est-ce que $L(G)$ est un langage régulier ? Si oui, donner une expression régulière qui le décrit (en montrant comment celle-ci peut être obtenue). Sinon, donner une preuve de la non régularité.

Exercice 2 :

Soit $L1 = \{a^{2n}b^{3n}c^i \mid n \geq 0 \text{ et } i \geq 3\}$, et soit $L2 = \{a^j b^m c^{2m} \mid j \geq 0 \text{ et } m \geq 0\}$.

Question 1 : Donner une grammaire hors-contextes générant $L1$. Faire de même pour $L2$.

Question 2 : Donner une formule de Presburger (contraintes linéaires) décrivant l'image de Parikh de $L1$. Même question pour $L2$.

Question 3 : Décrire le langage $L12$ correspondant à l'intersection de $L1$ et de $L2$. Prouver qu'il n'est pas hors-contexte.

Question 4 : Donner une formule de Presburger décrivant l'image de Parikh de $L12$. Existe-t-il un langage régulier ayant la même image de Parikh que celle de $L12$? Si oui, donner un langage régulier qui a cette propriété.

Exercice 3 :

Question 1 : Donner un automate fini sur l'alphabet $\{0,1\}^3$ qui reconnaît l'ensemble des vecteurs des codages binaires d'entiers x, y, z qui satisfont la contrainte : « $2x = y - 3z$ ».

Question 2 : Même question en considérant la formule : « $2x = y - 3z \ \&\& \ y = 3z$ », où $\&\&$ représente l'opération de conjonction (l'opérateur du « et » logique).

Exercice 4 :

Soit l'alphabet $\{a, b, c, d\}$. Quand ces symboles sont utilisés pour étiqueter des arbres, on considère que « a », « b », et « c » sont des symboles d'arité 2, et que « d » est un symbole d'arité 0. On fait abstraction des arités quand on considère des langages de mots sur cet alphabet.

Question 1 : Construire un automate d'arbres sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ qui reconnaît l'ensemble des arbres binaires dont toutes les feuilles sont étiquetées par « d » et ayant au moins un chemin contenant au moins un « a » et au plus 2 « b ».

Question 2 : Construire un automate d'arbres sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ qui reconnaît l'ensemble des arbres binaires dont toutes les feuilles sont étiquetées par « d » et dont tous les chemins contiennent exactement un « c » et au moins un « b ».

Question 3 : Construire un automate d'arbres sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ qui reconnaît l'ensemble des arbres binaires dont toutes les feuilles sont étiquetées par « d » et ayant au moins un chemin ne contenant pas de « a », et dont tous les chemins contiennent un nombre pair de « b ».

NB : Expliquer comment les automates sont définis (à quoi correspondent les états, à quoi correspondent les règles, etc.) Donner uniquement une liste de règles sans aucune justification ne sera pas considéré comme une réponse satisfaisante.