

Durée : 2 heures

Documents manuscrits autorisés.

Exercice 1:

Soit la grammaire $G = (V_T, V_N, S, P)$ telle que :

- $V_N = \{S, A, B, C, X, Y\}$
- $V_T = \{a, b, c, d, e, f\}$
- L'ensemble des productions P est donné par :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow A.B & X \rightarrow dX \mid eY \\ A \rightarrow C.A \mid a & Y \rightarrow f \\ C \rightarrow c.X & B \rightarrow bB \mid C \end{array}$$

Question : Est-ce que $L(G)$ est un langage régulier ?

Si oui, donner une expression régulière qui le définit.

Si non, prouver qu'il n'est pas régulier.

Exercice 2:

Question 1 : Donner une grammaire hors-contexte générant le langage $L_1 = \{a^n b^k a^n b^l \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

Question 2 : Donner un automate à pile reconnaissant le langage L_1 ci-dessus.

Question 3 : Même question que la question 1 pour

le langage $L_2 = \{a^k b^n a^l b^n \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

(2)

Question 4: Soit $L = L_1 \cap L_2$. Le langage est-il hors-contexte?

Si oui, donner une grammaire hors-contexte qui le génère.
Sinon, prouver qu'il n'est pas hors-contexte.

Question 5: Donner une contrainte linéaire sur les nombres d'occurrences des lettres a et b qui correspond à l'image de Parikh du langage L . Donner un automate d'état fini dont le langage (régulier) a la même image de Parikh que le langage L .

Exercice 3: Soit l'automate à pile dont les règles de transition sont données ci-dessous :

$$r_1: (p_1, \gamma_0) \leftrightarrow (p_2, \epsilon)$$

$$r_5: (p_2, \gamma_5) \leftrightarrow (p_2, \gamma_2 \gamma_4)$$

$$r_2: (p_2, \gamma_2) \leftrightarrow (p_1, \epsilon)$$

$$r_6: (p_2, \gamma_8) \leftrightarrow (p_3, \gamma_7 \gamma_3)$$

$$r_3: (p_3, \gamma_6) \leftrightarrow (p_2, \epsilon)$$

$$r_7: (p_3, \gamma_3) \leftrightarrow (p_2, \gamma_2 \gamma_1)$$

$$r_4: (p_1, \gamma_4) \leftrightarrow (p_3, \gamma_3 \gamma_2)$$

$$r_8: (p_3, \gamma_7) \leftrightarrow (p_3, \gamma_6 \gamma_5)$$

Question: Calculer l'ensemble des prédécesseurs de la configuration $c = (p_1, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)$. (calculer $\text{pré}^*(c)$).

Exercice 4: Soit $\Sigma = \{a, b\}$ - Donner un automate d'arbre qui reconnaît l'ensemble des arbres binaires (dont les sommets internes ont deux fils exactement) étiquetés par Σ , tels que :

- Le nombre total des sommets étiquetés par a est pair.
- Il existe un chemin allant de la racine à une feuille sur lequel le nombre des sommets étiquetés par b est impair.