

Algorithmique avancée

Exercices de révisions (partiel) n° 2

Exercice 1 : Rendez-vous on the line

Supposons qu'on ait 2 robots sur une ligne à une distance normalisée de deux unités entre eux. Chaque robot peut avancer dans un sens ou dans l'autre d'une distance unitaire par unité de temps (temps discret). Sachant que les robots ne savent pas dans quelle direction est placé son vis-à-vis et qu'ils n'ont pas de capteur visuel, ils appliquent la stratégie dite du "rendez-vous 1F2B" : de manière indépendante chaque robot choisit une direction avec probabilité 1/2 et avance dans cette direction d'une unité ("1F" pour "1 step forward") et revient de deux unités dans l'autre ("2B" pour "2 steps backward").

1. Dans quelle positions (à quelles distances) peuvent être les robots après 3 unités de temps ?
2. Quel est le temps moyen de rendez-vous pour cette stratégie ?
3. Si les robots partent d'une distance de δ unités, donner une récurrence vérifiée par le temps moyen en fonction de δ pour la même stratégie "1F2B" ?
4. Donner une version "offline" du problème de rendez-vous.
5. Définir un ratio de compétitivité de n'importe quelle stratégie S par rapport au problème courant
6. Donner alors un critère d'optimalité sur toutes les stratégies.

Exercice 2 : Algorithme randomisé de recherche

Etant donné un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ de n entiers strictement positifs et 2 à 2 distincts, le but est de trouver le k -ième plus petit élément de A . On trie et on a fini en $\Theta(n \log n)$.

Cependant, on peut faire l'algorithme suivant qu'on appellera $\text{Algo}(A, k)$:

- Si $n = 1$ alors retourner a_1 sinon tirer un chiffre i uniformément parmi $\{1, \dots, n\}$.
- Calculer $A_{\{<\}} = \{x \in A, x < a_i\}$ et $A_{\{>\}} = A - A_{\{<\}}$.
- Si $\text{Card}(A_{\{<\}}) > k$ alors on fait un appel récursif de l'algorithme présent sur $A_{\{<\}}$, i.e. $\text{Algo}(A_{\{<\}}, k)$.
- Si $\text{Card}(A_{\{<\}}) = k - 1$ alors retourner a_1 . Sinon appel récursif $\text{Algo}(A_{\{>\}}, k - |A_{\{<\}}| - 1)$.

1. Montrer sur un petit exemple le fonctionnement de l'algorithme $\text{Algo}(A, k)$.
2. Quel est le gain par rapport à l'algorithme déterministe basé sur le tri ?

Exercice 3 : $2n$ bits en parallèle : n bits à 0 et n bits à 1

Dans cet exercice, nous avons en entrée n et nous devons générer aléatoirement uniformément un tableau de $2n$ bits avec n bits égaux à 1 (resp. 0).

1. Donnez un algorithme séquentiel en $O(n)$ (on supposera que générer un nombre aléatoire se fait en temps constant.).
2. Donnez un algorithme parallèle avec le modèle de votre choix (bien spécifier le modèle) pour le même problème.
3. Analysez votre algorithme parallèle : complexité, speed-up, travail/surface.