

Algorithmique avancée

Exercices de révisions (partiel) n° 1

Exercice 1 : 2-XOR-SAT

2-XOR-SAT est une variante de 2-SAT. Une formule 2-XOR-SAT portant sur n variables x_1, x_2, \dots, x_n est constituée de m clauses de la forme

$$x_i \oplus x_j = 0 \text{ ou } x_i \oplus x_j = 1.$$

1. Combien a-t-on de formules différentes avec m clauses ?
2. Sous l'hypothèse d'une génération aléatoire uniforme de toutes les formules possibles construites avec m clauses, déduire de la question précédente la probabilité qu'un certain ensemble de m clauses soit dans une formule tirée uniformément au hasard.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une formule soit SAT.
4. En vous inspirant de 2-SAT, formuler le problème de décision 2-XORSAT
5. Ecrire un algorithme pour le problème décision 2-XOR-SAT.
6. Quelle est la classe de complexité du problème de décision 2-XOR-SAT ?

Exercice 2 : Algorithmes parallèles

1. Ecrire un algorithme calculant le ET binaire de n bits en utilisant n processeurs avec le modèle PRAM EREW. Analysez votre algorithme.
2. Ecrire un algorithme calculant le ET binaire de n bits en utilisant $\frac{n}{\log n}$ processeurs toujours avec le modèle PRAM EREW. Quelles sont les différences par rapport à la question précédente ?
3. Soit $f(n)$ une fonction telle que $1 \ll f(n) \ll n$ ($f(n)$ tend vers $+\infty$ avec n mais bien moins vite que n). Ecrire un algorithme calculant le ET binaire de n bits en utilisant $O(f(n))$ processeurs avec le modèle CRCW PRAM commun. Donnez le temps d'exécution de votre algorithme.

Exercice 3 : Algorithme randomisé et facteur d'approximation

Le problème difficile d'optimisation MAX NOT-ALL-EQUAL-3-CNF-SAT est le suivant :

- INPUT : A formule CNF fait de clauses c_1, c_2, \dots, c_m ou chaque clause est faite exactement de 3 littéraux (variables et leur négations). Les variables sont x_1, \dots, x_n .
- SOLUTION : Une affectation des x_i .
- A MAXIMISER : Le nombre de clauses qui contient au moins un littéral à vrai et au moins un littéral à faux.

1. En mettant chaque variable x_i à vrai ou faux avec probabilité $1/2$ quelle est l'espérance du nombre de clauses satisfaites ?
2. Quelle est alors l'espérance du facteur d'approximation ?