

UNIVERSITÉ DE PARIS 7, ALGORITHMIQUE AVANCÉE
M1, INFORMATIQUE,
EXAMEN DU MERCREDI 20 MAI 2008, 13H–15H

Seules les notes manuscrites prises en cours sont autorisées. Aucun brouillon n'est accepté. La rédaction doit être claire et continue (pas de renvoi à des pages antérieures ou postérieures). Les exercices sont indépendants. Tout résultat doit être justifié par un minimum d'indication.

Exercice 1 — Programmation linéaire On rappelle qu'une instance d'un problème de programmation linéaire en forme standard se présente de la façon suivante :

$$\text{Maximiser } \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j &\leq b_i, & i = 1, \dots, n \\ x_j &\geq 0, & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

1) Résoudre le problème suivant en donnant la valeur maximale et les valeurs des variables pour lesquelles cette valeur est atteinte.

Maximiser

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rrcl} & 3x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 4 \end{array}$$

2) Exprimer le problème dual du problème précédent.

3) Appliquer la méthode des écarts complémentaires pour vérifier que la solution du 2) est correcte. On rappelle (avec les notations usuelles rappelées ci-dessus et en notant x_j^* les valeurs des variables calculées en 1)) que cette méthode consiste essentiellement à trouver la valeur des variables y_i qui satisfont les conditions $y_i = 0$ si $\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j < b_i$ et qui sont solutions du système des équations

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i = c_j \text{ dès que } x_j^* > 0$$

4) Mettre sous forme standard le problème suivant (on ne demande pas de le résoudre) :

Minimiser

$$2x_1 - 3x_2$$

sous contraintes

$$\begin{array}{rrcl} 4x_1 & +5x_2 & & \geq 1 \\ 6x_1 & -6x_2 & & = 7 \\ x_1 & +8x_2 & & \leq 20 \\ & & x_2 & \leq 0 \end{array}$$

Exercice 2 — Systèmes d'équations linéaires Résoudre le système suivant

$$\begin{array}{rrcl} x_1 & & +x_3 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3 \\ 2x_1 & & +5x_3 & = 12 \end{array}$$

Exercice 3 — *Stratégie optimale* Déterminer la (les ?) stratégies optimale(s) pour le jeu matriciel suivant. Donner la valeur du jeu et en déduire s'il est équitable ou non.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 — *Arithmétique modulaire* Evaluer les entiers suivants

$$7^{162} \bmod 19 \text{ et } 11^{51} \bmod 17$$

Exercice 5 — *Euclide étendu* Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver les inverses suivants

$$\begin{aligned} 17^{-1} \bmod 58 \\ 19^{-1} \bmod 117 \end{aligned}$$

Exercice 6 — *Théorème des restes chinois* Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x &= 2 \bmod 3 \\ x &= 1 \bmod 5 \\ x &= 4 \bmod 7 \end{cases}$$

Exercice 7 — *RSA* Quelle est la fonction ϕ d'Euler de l'entier 33 ?

Décrypter le message reçu $C = 30$ encodé avec la clé $(17, 33)$ (c'est-à-dire trouver M avec le codage $M \rightarrow C = M^{17} \bmod 33$).