

## Algorithmique — M1

### Examen du 22/6/11 — session 2

Université Paris Diderot

Documents autorisés : Deux feuilles de papier format A4  
Durée : 3h (de 8h30 à 11h30)

### On applique les cours

#### Exercice 1 – Analyse de complexité

Mlle Master a développé un algorithme diviser-pour-régner pour un problème P. L'algorithme réduit une instance de taille  $n$  du problème P à 16 sous-problèmes de taille  $n/2$ , et encore  $O(n^3)$  opérations. Trouvez la complexité  $T(n)$  de l'algorithme de Mlle Master.

#### Exercice 2 – Gloutonneries

M et Mme de Glouton veulent décorer les murs de leur château sans dépasser leur budget de 100 €. Le magasin ALGORAMA propose :

- du carrelage (20€ le  $m^2$ , le stock est  $15m^2$ ) ;
- de la chaux (0,1€ le  $m^2$ , le stock est  $100m^2$ ) ;
- du papier peint (2€ le  $m^2$ , le stock est  $10m^2$ ) ;
- de la peinture (1€ le  $m^2$ , le stock est  $50m^2$ ).

Comment choisir les matériaux pour couvrir la plus grande surface ?

1. Quel problème algorithmique de cours correspond à ce problème de peinture ? En quoi consiste l'algorithme du cours ?
2. Appliquez cet algorithme. Donnez toutes les étapes de son application.
3. Combien de  $m^2$  pourront-ils décorer ?

#### Exercice 3 – Bibliothèque

$m$  étudiants viennent à la Bibliothèque Fulkerson pour réviser le cours d'algorithmique. Il y a  $n$  livres sur le sujet, et la bibliothèque prête jusqu'à 3 livres à chaque étudiant. Les souhaits des étudiants sont représentés dans un tableau  $C[m, n]$ , avec  $C_{ij} = 1$  si l'étudiant  $i$  veut lire le livre  $j$ . Comment maximiser le nombre de livres prêtés aux étudiants en respectant toutes les contraintes ?

1. Transformez ce problème en un problème algorithmique vu en cours. Pensez à faire un dessin.
2. Justifiez votre transformation.
3. Quel est l'algorithme de cours ?
4. Analysez la complexité de l'algorithme.

## Deux automobilistes

Monsieur Retour-Arrière et Mme La Dynamique visitent (chacun dans sa voiture) un pays avec 100 villes  $V_1, \dots, V_{100}$ , certaines de ces villes sont connectées par des routes. Les longueurs de ces routes sont données dans un tableau  $M[i, j]$  (s'il n'y a pas de route de  $V_i$  à  $V_j$  alors  $M[i, j] = \infty$ ). Aidez-les à trouver les itinéraires conformes à leurs souhaits.

### Exercice 4 – Premier automobiliste - backtracking

Monsieur Retour-Arrière souhaite :

- commencer son voyage en  $V_1$  ;
- visiter, au rythme d'une ville (et une route) par jour, 60 villes distinctes ;
- ne jamais avoir parcouru plus de 450km en 2 jours consécutifs.

On cherche à développer un algorithme pour trouver un tel itinéraire (s'il existe).

1. Écrivez l'algorithme (en pseudocode).
2. Expliquez cet algorithme (vous pouvez vous inspirer de l'indication).
3. Estimez le nombre d'opérations nécessaire.

Indicatif : Essayez de répondre aux questions suivantes pour parvenir à un tel algorithme.

- Comment définir une solution partielle ?
- Quelle est une solution partielle de taille 1 ?
- Comment passer d'une solution partielle à une solution plus grande ? Comment tester que la contrainte de 450km par 2 jours est respectée ?
- Quand s'arrêter ?
- Comment représenter une solution partielle par une structure de données ?

### Exercice 5 – Deuxième automobiliste - programmation dynamique

Mme La Dynamique visite le même pays, mais avec les objectifs différents :

- commencer son voyage en  $V_1$  ;
- visiter les villes (une ville et une route par jour) en ordre croissant des numéros (elle ne passe pas forcément par toutes les villes) ;
- ne faire jamais plus que  $\leq 250$ km dans une journée.

On cherche à développer un algorithme pour trouver un tel itinéraire de longueur kilométrique maximale.

1. Soit  $c(i)$  une fonction qui donne la longueur kilométrique maximale d'un itinéraire (respectant les contraintes) qui se termine en  $V_i$ . Écrivez les équations de récurrence pour cette fonction sans oublier les cas de base.
2. Écrivez un algorithme efficace (récursif avec "marquage" ou itératif) pour calculer  $c$ .
3. En sachant calculer la fonction  $c(i)$ , comment trouver la longueur kilométrique maximale d'un itinéraire admissible pour Mme La Dynamique ?
4. Analysez la complexité de votre algorithme.
5. Comment modifier votre algorithme pour qu'il trouve l'itinéraire admissible le plus long (et non seulement sa longueur) ?