Université Paris Diderot Année 2015-2016
L2 Maths - Maths-Info **PS4, partiel**

Les quatre exercices sont indépendants. La durée est de trois heures. Le barême approximatif est 5.5/5/3.5/6. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.

Exercice 1 On suppose qu'il y a autant de chances d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ait au moins un garçon ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant que l'aîné est une fille ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?
4. On sait que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille répond au téléphone avec probabilité $p \in [0, 1]$. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille répond. Quelle est la probabilité pour que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 2 Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire quatre fois de suite une boule avec remise. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. $A =$"le nombre 1 apparaît au moins une fois".
2. $B =$"les quatre nombres tirés forment une suite strictement croissante".
3. $C =$"les quatre nombres tirés forment une suite croissante (au sens large)".

On ne cherchera pas à évaluer numériquement les résultats.

Exercice 3 Un buveur décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de 0.4. S'il boit un jour donné, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à 0.8. On appelle A_n l'événement "le buveur ne boit pas le jour n^o n" et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Etablir une relation de récurrence sur p_n (c'est-à-dire exprimer p_{n+1} en fonction de p_n).
2. Le but de la question est de résoudre la relation de récurrence.
   (a) Mettre la relation de récurrence sous la forme $(p_{n+1} - b) = a(p_n - b)$, pour un a et un b qu'on identifiera.
   (b) Exprimer p_n en fonction de p_1.
   (c) Que se passe–t–il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 4 On considère une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. La i-ème épreuve peut donner une réussite (événement R_i) avec probabilité $p \in]0, 1[$ ou un échec (événement R_i^c) avec probabilité $1 - p$. On note X le numéro (aléatoire) de l'épreuve où l'on observe la *deuxième* réussite.

1. Ecrire les événements $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$, et $\{X = 4\}$ à l'aide des R_i et R_i^c et calculer leurs probabilités respectives.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier k.
3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$.

Solutions

Exercice 1

1. **[1pts]** L'espace fondamental est $\Omega = \{(GG), (GF), (FG), (FF)\}$, où la première coordonnée désigne le sexe de l'aîné. La probabilité est uniforme sur cet ensemble.
   Soit A l'événement "il y a au moins un garçon", qui est égal à $\{(GG), (GF), (FG)\}$. On a :
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$$
2. **[1pts]** On utilise le même espace de probabilité.
   Soit B l'événement "l'aîné est une fille", qui est égal à $\{(FG), (FF)\}$. On a :
   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(FG)\})}{\mathbb{P}(\{(FG), (FF)\})} = \frac{1}{2}$$
3. **[1pts]** On utilise le même espace de probabilité.
   Soit C l'événement "il y a au moins une fille", qui est égal à $\{(GF), (FG), (FF)\}$. On a :
   $$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(\{(GF), (FG)\})}{\mathbb{P}(\{(GF), (FG), (FF)\})} = \frac{2}{3}$$
4. **[2.5pts]** L'espace fondamental est $\Omega = \{(GG), (GF), (FG), (FF)\}$, où la première coordonnée désigne l'enfant qui répond au téléphone. La probabilité n'est pas uniforme ! On a :
   $$\mathbb{P}(\{(GG)\} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\{(FG)\}|\{(FG), (GF)\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{(FF)\}) = \frac{1}{4}.$$
   On trouve donc que $\mathbb{P}(\{(FG), (GF)\}) = 1/2$, et donc $\mathbb{P}(\{(FG)\}) = \frac{p}{2}$ et $\mathbb{P}(\{(GF)\}) = \frac{1-p}{2}$.
   Soit D l'événement "une fille répond au téléphone", qui est égal à $\{(FG), (FF)\}$. On a :
   $$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(\{(FG)\})}{\mathbb{P}(\{(FG), (FF)\})} = \frac{p/2}{p/2 + 1/4} = \frac{2p}{2p+1}$$

Exercice 2 On tire quatre fois de suite une boule avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées. A chaque tirage, on a 10 choix possibles, on prend alors comme espace de probabilité $\Omega = \{1, \ldots, 10\}^4$, que l'on munit de la probabilité uniforme.

1. **[1pts]** Le complémentaire de cet ensemble est A^c ="obtenir aucun 1". On a $A^c = \{2, \ldots, 10\}^4$ et donc $|A^c| = 9^4$ et par suite $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - (9/10)^4$.
2. **[1.5pts]** On a $B = \big\{(x_1, \ldots, x_4) \in \{1, \ldots, 10\} \text{ t.q. } x_1 < x_2 < x_3 < x_4\big\}$. Donc B est l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 10\}$. Comme $|B| = \binom{10}{4}$, on trouve $\mathbb{P}(B) = \binom{10}{4}/10^4$.
3. **[2.5pts]** Soit $(x_1, \ldots, x_4) \in C$. En posant $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 2$, $y_4 = x_4 + 3$, on obtient une suite strictement croissante $1 \leqslant y_1 < y_2 < y_3 < y_4 \leqslant 13$. Ainsi C est en bijection avec l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 13\}$, i.e. avec $\big\{(y_1, \ldots, y_4) \in \{1, \ldots, 13\} \text{ t.q. } y_1 < y_2 < y_3 < y_4\big\}$. D'où $|C| = \binom{13}{4}$, et $\mathbb{P}(C) = \binom{13}{4}/10^4$.

Exercice 3

1. **[1.5pts]** En utilisant la formule des probabilités totales :
   $$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c)$$
   On trouve donc :
   $$p_{n+1} = 0.4p_n + 0.8(1 - p_n) = 0.8 - 0.4p_n$$
2. (a) **[0.5pts]** On a :
   $$(p_{n+1} - b) = a(p_n - b)$$
   avec $a = -0.4$ et $b = 4/7$.

(b) **[1pts]** Donc $p_n - b = a^{n-1}(p_1 - b)$, ce qui donne

$$p_n = b + (p_1 - b)a^{n-1}$$

(c) **[0.5pts]** Lorsque $n \to +\infty$, comme $|a| < 1$ on a $p_n \to b$.

Exercice 4

1. **[2pts]** L'événement $\{X = k\}$ correspond à une suite de k expériences dans laquelle la dernière expérience est réussie, et dans laquelle il y a une réussite et une seule sur les $k-1$ premières expériences. On a :

$$\{X = 2\} = R_1 \cap R_2$$

$$\{X = 3\} = \big(R_1^c \cap R_2 \cap R_3\big) \cup \big(R_1 \cap R_2^c \cap R_3\big),$$

$$\{X = 4\} = \big(R_1 \cap R_2^c \cap R_3^c \cap R_4\big) \cup \big(R_1^c \cap R_2 \cap R_3^c \cap R_4\big) \cup \big(R_1^c \cap R_2^c \cap R_3 \cap R_4\big)$$

Donc $\mathbb{P}(X = 2) = p^2$, $\mathbb{P}(X = 3) = 2p^2(1-p)$, et $\mathbb{P}(X = 4) = 3p^2(1-p)^2$.

2. **[2pts]** Plus généralement, pour tout $k \geqslant 2$, on a $k-1$ choix possibles pour placer la première expérience réussie, donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2.$$

On vérifie que $\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

3. **[2pts]**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)k(1-p)^{k-2}p^2 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\sum_{x=0}^{\infty} x^k\right]_{x=(1-p)} p^2 \\ &= \left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x}\right]_{x=(1-p)} p^2 = \left[\frac{2}{(1-x)^3}\right]_{x=(1-p)} p^2 = \frac{2}{p} \end{aligned}$$