Université Paris Diderot Année 2015-2016

L2 Maths - Maths-Info **PS4, examen final**

Les quatre exercices sont indépendants. Le barème approximatif est 5.5/4.5/4/6. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.

Exercice 1 Soient $p, q \in]0,1[$ tels que $p+q=1$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi jointe :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big((X,Y)=(x,y)\big) = q^2 p^{x+y}.$$

1. Déterminer les lois de X et de Y. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
   Remarquer que X et Y suivent la même loi.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \max(X,Y)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X+Y$. Calculer $\mathbb{E}[S]$.
5. Les variables aléatoires S et U sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

1. Calculer l'espérance des variables aléatoires réelles $Y = \frac{1}{1+X}$ et $Z = (-1)^X$ (sans chercher à calculer la loi des variables Y et Z).
2. Déterminer la loi de Z. Retrouver alors l'espérance de Z à partir de la loi de Z.

Exercice 3 Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire la loi de densité $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$.

1. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y, ainsi que sa densité et son espérance.
2. Calculer la probabilité que le polynôme $P(t) = t^2 - 2Xt + 1$ ait deux racines réelles distinctes, puis celle qu'il n'ait pas de racine réelle.
   Quelle est la probabilité que ce polynôme ait une racine réelle double ?

Exercice 4 Soit $\alpha > 0$.
Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$.
Soit X une variable aléatoire réelle à densité $p(x) = \alpha x^{-1-\alpha}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$.

1. Vérifier que p est une densité de probabilité. Calculer la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance de X, en précisant à quelle(s) condition(s) elle existe et est finie.
3. Soit $V = U^{-1/\alpha}$. Montrer que X et V ont la même loi.
4. On suppose que X et U sont indépendantes.
   (a) Montrer que $Y = XU$ est une variable aléatoire réelle à densité et identifier cette densité.
   (b) Sous la condition trouvée en question 2., montrer que Y est intégrable et calculer l'espérance de Y.

Solutions

Exercice 1

1. **[1 pt]** On applique la formule des marginales. On trouve que X et Y suivent la loi déterminée par $\mathbb{P}(X = x) = qp^x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} xqp^x = qp \sum_{x=0}^{\infty} xp^{x-1} = qp\frac{d}{dp}\frac{1}{1-p} = \frac{p}{q}$$

2. **[0.5 pt]** On vérifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$, donc X et Y sont indépendantes.
3. **[1.5 pts]** Pour tout $u \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}(X \leqslant u, Y \leqslant u) = \mathbb{P}(X \leqslant u)\mathbb{P}(Y \leqslant u) = q^2\Big(\sum_{x=0}^{u} p^x\Big)^2 = q^2\Big(\frac{1-p^{u+1}}{1-p}\Big)^2 = (1-p^{u+1})^2$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = u) &= \mathbb{P}(U \leqslant u) - \mathbb{P}(U \leqslant u-1) = (1-p^{u+1})^2 - (1-p^u)^2 = -2p^{u+1} + p^{2u+2} + 2p^u - p^{2u} \\ &= qp^u(2 - p^u(1+p))\end{aligned}$$

4. **[1.5 pt]** Pour tout $s \in \mathbb{N}$, comme $\{S = s\} = \cup_{u=0}^{s}\{X = u, Y = s-u\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = s) &= \sum_{u=0}^{n} \mathbb{P}(X = u, Y = s-u) = \sum_{u=0}^{s} \mathbb{P}(X = u)\mathbb{P}(Y = s-u) = q^2 \sum_{u=0}^{s} p^u p^{s-u} \\ &= (s+1)q^2p^s\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{2p}{q}$.
5. **[1 pt]** On a $\{U = 0\} = \{X = 0, Y = 0\}$. Donc $\mathbb{P}(S = 1, U = 0) = 0$. Or $\mathbb{P}(S = 1)\mathbb{P}(U = 0) \neq 0$. Donc S et U ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

1. **[2 pts]** Les deux variables aléatoires Y et Z sont réelles et bornées par 1, ellles sont donc intégrables.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n}\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n!}e^{-\lambda} \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - 1\Big)\lambda^{-1}e^{-\lambda} = (e^\lambda - 1)\lambda^{-1}e^{-\lambda} = (1 - e^{-\lambda})\lambda^{-1}\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$$

2. **[2.5 pts]** Z ne peut prendre pour valeurs que -1 et 1. Sa loi est déterminée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X \text{ est pair}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda} = \cosh(\lambda)e^{-\lambda} = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$$

$$\mathbb{P}(Z = -1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{z\in\{-1,1\}} z\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = -1) = e^{-2\lambda}$$

Exercice 3 1. **[2.5 pts]** On considère la fonction de répartition F_Y de Y :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Comme $\frac{d}{dy}e^{-\lambda\sqrt{y}} = -\frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}$ pour tout $y > 0$ et $1-e^{-\lambda\sqrt{y}} = \int_0^y \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}dy'$, on trouve que Y est une variable aléatoire à densité

$$p(y) = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(y)$$

On a :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

2. **[1.5 pts]** On note A l'événement "le polynôme $t^2 - 2tX + 1$ a deux racines réelles distinctes". Comme le discriminant de ce polynôme du second degré est $4X^2 - 4$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X^2 - 1 > 0) = \mathbb{P}(X > 1) = e^{-\lambda}$$

On note B l'événement "le polynôme $t^2 - 2tX + 1$ n'a pas de racine réelle". On a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X^2 - 1 < 0) = \mathbb{P}(X < 1) = 1 - e^{-\lambda}$$

On note C l'événement "le polynôme $t^2 - 2tX + 1$ a une racine réelle double". On a :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(X^2 - 1 = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0$$

Exercice 4 1. **[1 pt]** p est une fonction à valeurs positives et son intégrale vaut 1 car $\int_1^\infty x^{-\alpha-1}dx = \alpha^{-1}$, donc c'est bien une densité de probabilité. Sa fonction de répartition F_X est

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. **[0.5 pt]** $\mathbb{E}[X]$ existe et est finie ssi l'intégrale $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ est convergente ssi $\alpha > 1$. Dans ce cas $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha-1}$.
3. **[1 pt]** X et V ont même loi si elles ont la même fonction de répartition. On remarque que $\mathbb{P}(V \in [1,\infty[) = \mathbb{P}(U \in [0,1]) = 1$. On calcule la fonction de répartition F_V de V :

$$F_V(x) = \mathbb{P}(U^{-1/\alpha} \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \mathbb{P}(U \geqslant x^{-\alpha}) = 1 - x^{-\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On a bien $F_V(x) = F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc X et V ont même loi.

4. (a) **[2.5 pts]** On calcule la fonction de répartition F_Y de Y. Comme X et U sont à valeurs positives, Y est à valeurs positives et $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ si $y < 0$. Soit $y \geqslant 0$.

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(XU \leqslant y) = \int_1^\infty dx \int_0^1 du\alpha x^{-1-\alpha}\mathbf{1}_{xu\leqslant y} = \int_1^\infty dx\alpha x^{-1-\alpha}\int_0^1 du\mathbf{1}_{xu\leqslant y}$$
$$= \int_1^\infty dx\alpha x^{-1-\alpha}\int_0^{\min(1,y/x)} du = \int_1^\infty dx\alpha x^{-1-\alpha}\min(1,y/x)$$

Si $y \leqslant 1$, alors $y/x \leqslant 1$ pour tout $x \in [1,\infty[$, donc

$$F_Y(y) = \int_1^\infty dx\alpha x^{-1-\alpha}y/x = y\int_1^\infty dx\alpha x^{-2-\alpha} = \frac{y\alpha}{1+\alpha}$$

Si $y > 1$, alors $y/x \leqslant 1$ pour tout $x \in [y,\infty[$ et $y/x > 1$ pour tout $x \in [1,y[$, donc

$$F_Y(y) = \int_1^y dx\alpha x^{-1-\alpha} + \int_y^\infty \alpha x^{-1-\alpha}y/x = 1 - y^{-\alpha} + y\int_y^\infty dx\alpha x^{-2-\alpha} = 1 - \frac{y^{-\alpha}}{1+\alpha}$$

Donc la variable Y est à densité :

$$p_Y(y) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\mathbf{1}_{[0,1]}(y) + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{]1,\infty[}(y) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\big(\max(y,1)\big)^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)$$

(b) **[1 pt]** Si $\alpha > 1$, alors Y est le produit de deux variables réelles intégrables indépendantes, elle est donc intégrable. On calcule : $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XU] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[U] = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{2}$.