Université Paris Diderot Année 2014-2015

L2 Maths - Maths-Info **PS4, examen de seconde session**

Les quatre exercices sont indépendants. Le barème approximatif est 3/6/5.5/5.5. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.

Exercice 1 Un buveur décide d'essayer de ne plus boire. S'il ne boit pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain est de 0.4. S'il boit un jour donné, alors le remords fait que la probabilité qu'il ne boive pas le lendemain monte à 0.8. On appelle A_n l'événement "le buveur ne boit pas le jour n^o n" et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Etablir une relation de récurrence sur p_n (c'est-à-dire exprimez p_{n+1} en fonction de p_n).
2. Le but de la question est de résoudre la relation de récurrence.
   (a) Mettre la relation de récurrence sous la forme $(p_{n+1} - a) = b(p_n - a)$, pour un a et un b qu'on identifiera.
   (b) Exprimer p_n en fonction de p_1.
   (c) Que se passe–t–il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 2 On considère X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi géométrique de paramètre p :

$$p_X(n) = p_Y(n) = p(1-p)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

On supposera $p \in]0, 1[$. X (respectivement Y) modélise le nombre de coups de fusil nécessaire à Robert (resp. Bernard) pour arriver à toucher un malheureux lapin (resp. un non-moins malheureux chevreuil).

1. Quelle est la probabilité que Bernard et Robert utilisent exactement le même nombre de cartouches ?
2. Calculer la loi du nombre total $Z = X + Y$ de cartouches utilisées.
3. Calculer l'espérance et la variance de Z.
4. Sachant que n cartouches ont été utilisées au total, quelle est la loi du nombre de cartouches utilisées par Robert ?
   C'est-à-dire : pour $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 1$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X = m|Z = n)$.

Exercice 3 Soit r un réel strictement positif et X une v.a. réelle à densité $p(x) = rx^{-r-1}$ si $x \geqslant 1$ et $p(x) = 0$ si $x < 1$.

1. Montrer que p est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles X admet une espérance finie, et calculer alors cette espérance. Même question pour la variance.
3. Soit $Y = \ln(X)$. Que vaut $\mathbb{P}(Y \leqslant 0)$? Montrer que Y est une v.a. réelle à densité et identifier cette densité.

Exercice 4 Deux horloges A et B sont mises en marche au même instant (qu'on choisit comme l'instant 0). L'horloge A (resp. B) sonne après un temps aléatoire T_A (resp. T_B). On suppose que T_A et T_B sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire la loi à densité

$$p(t) = \lambda \exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,\infty[}(t)$$

1. <u>Calculer</u> la moyenne et la variance de T_A.
2. On note $U = \min(T_A, T_B)$ l'instant de la première sonnerie.
   (a) Si $t \in \mathbb{R}^+$, calculer $\mathbb{P}(U \geqslant t)$.
   (b) En déduire la loi de U.
3. On note $V = \max(T_A, T_B)$ l'instant de la seconde sonnerie.
   (a) Montrer que V est une v.a. réelle à densité et identifier cette densité.
   (b) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Solutions

Exercice 1 1. On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c) = 0.4\mathbb{P}(A_n) + 0.8\mathbb{P}(A_n^c) \\ &= 0.4\mathbb{P}(A_n) + 0.8(1 - \mathbb{P}(A_n)) = 0.8 - 0.4p_n \end{aligned}$$

2. On trouve que, pour $a = 4/7$,

$$(p_{n+1} - a) = -0.4(p_n - a)$$

Donc $p_n = a + (-0.4)^{n-1}(p_1 - a)$.
En passant à la limite $n \to +\infty$: $p_n \to a$.

Exercice 2 1. On note A l'événement "Bernard et Robert utilisent exactement le même nombre de cartouches". On peut décomposer A comme une union disjointe : $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{X = Y = n\}$, et donc $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = Y = n)$, ce qui donne par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

2. Z peut prendre pour valeurs les entiers $\geqslant 2$. La loi de Z est (pour tout $n \geqslant 2$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = n) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1}\{X = k, Y = n-k\}\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k, Y = n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

3. Comme X et Y ont même loi, on a $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2\mathbb{E}[X]$ où X est une variable géométrique de paramètre p. Voir le cours : $\mathbb{E}[X] = 1/p$ et donc $\mathbb{E}[Z] = 2/p$.
Comme X et Y sont indépendantes et ont même loi, on a $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 2\mathrm{Var}(X)$, où X est une variable géométrique de paramètre p. Voir le cours : $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$ et donc $\mathrm{Var}(Z) = 2(1-p)/p^2$.

4. On a :

$$\mathbb{P}(X = m|Z = n) = \frac{\mathbb{P}(X = m, Z = n)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = m, Y = n-m)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = m)\mathbb{P}(Y = n-m)}{\mathbb{P}(Z = n)}$$

Si $m \geqslant n$, alors $\mathbb{P}(X = m|Z = n) = 0$ car $\mathbb{P}(Y = n-m) = 0$. Si $1 \leqslant m \leqslant n-1$, alors :

$$\mathbb{P}(X = m|Z = n) = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{1}{n-1}$$

C'est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n-1\}$.

Exercice 3 1. Il faut montrer que p est intégrable et d'intégrale 1. Or la fonction $x^{-r-1}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$ est intégrable ssi $r > 0$ et alors $\int_1^{\infty} x^{-r-1} = 1/r$, donc p est bien une densité de probabilité.

2. X admet une espérance finie ssi $\int_1^{\infty} xp(x)dx$ est intégrable, c'est-à-dire ssi $r > 1$, et alors $\mathbb{E}[X] = r/(r-1)$.
X admet une variance finie ssi elle admet une second moment fini ssi $\int_1^{\infty} x^2p(x)dx$ est intégrable, c'est-à-dire si $r > 2$, et alors $\mathbb{E}[X^2] = r/(r-2)$ et :

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{r}{r-2} - \frac{r^2}{(r-1)^2} = \frac{r(r-1)^2 - r^2(r-2)}{(r-2)(r-1)^2} = \frac{r}{(r-2)(r-1)^2}$$

3. D'une part, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(X \leqslant 1) = 0$. D'autre part, si $y \geqslant 0$, alors

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant e^y) = \int_1^{e^y} r x^{-r-1} dx = [-x^{-r}]_1^{e^y} = 1 - e^{-ry}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre r.

Exercice 4

1. Cf cours : $\mathbb{E}[T_A] = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(T_A) = 1/\lambda^2$.
2. On a :

$$\mathbb{P}(U \geqslant t) = \mathbb{P}(T_A \geqslant t, T_B \geqslant t) = \mathbb{P}(T_A \geqslant t)\mathbb{P}(T_B \geqslant t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 0 \\ e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre 2λ.
3. On calcule la fonction de répartition de V :

$$F(t) = \mathbb{P}(V \leqslant t) = \mathbb{P}(T_A \leqslant t, T_B \leqslant t) = \mathbb{P}(T_A \leqslant t)\mathbb{P}(T_B \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable (sauf en 0), sa dérivée sur $]0, \infty[$ est

$$p(t) := 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{]0,\infty[}(t),$$

et on a

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} p(s) ds$$

Donc V est une v.a. réelle à densité p.
On a $\mathbb{P}(V < U) = 0$, donc $\mathbb{P}(V \leqslant 1, U \geqslant 2) = 0$. Or $\mathbb{P}(V \leqslant 1) > 0$, $\mathbb{P}(U \geqslant 2) > 0$, donc le produit est strictement positif. On a donc $\mathbb{P}(V \leqslant 1, U \geqslant 2) \neq \mathbb{P}(V \leqslant 1)\mathbb{P}(U \geqslant 2)$, ce qui prouve que les v.a. U et V ne sont pas indépendantes.