**Université Paris Diderot** Année 2014-2015
L2 Maths - Maths-Info **PS4, examen final**

*Les quatre exercices sont indépendants. Le barême approximatif est 3/6/4.5/6.5. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable, ne sont autorisés.*

**Exercice 1** Un laboratoire vient de mettre au point un nouveau test de dépistage d'un produit dopant illicite chez les athlètes. Les experts pensent que 1% des athlètes sont dopés. De plus, des expériences ont montré que sur cent athlètes dopés, deux ne sont pas détectés par le test, et que sur trente athlètes non-dopés passant le test, un est déclaré positif à tort.

1. Calculer la probabilité qu'un athlète soit déclaré positif suite à un test.
2. Calculer la probabilité qu'un athlète soit dopé, lorsque son test est négatif.

*Pour chaque question, donner le résultat sous forme d'un nombre rationnel et une valeur approchée avec un chiffre significatif.*

**Exercice 2** Soit $X$ une variable aléatoire (v.a.) de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in ]0, +\infty[$, i.e. :

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer la fonction génératrice de $X$. En déduire la moyenne et la variance de $X$.
2. Soit $p \in ]0, 1[$. Soit $Y$ une seconde v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le même espace de probabilité que $X$, qui satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k = 0, ..., n.$$

   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
   (b) Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.
   (c) On pose $Z = X - Y$. Calculer la loi du couple $(Y, Z)$.
   (d) Montrer que $Y$ et $Z$ sont des v.a. indépendantes. Donner leurs lois.
   (e) Calculer la covariance du couple $(X, Y)$.

**Exercice 3** Soient $a, b$ deux réels strictement positifs. Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité

$$p(x) = b \exp(-a|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Trouver $b$ en fonction de $a$ afin que $p(x)$ soit bien une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de $X$.
3. Déterminer la loi de $Y = X^2$. Est-ce une loi à densité ? Si oui, quelle est cette densité ?
4. Calculer l'espérance de $Y$.

**Exercice 4** Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $U = \max(X, 1 - X)$ et $V = \min(X, 1 - X)$.
(pour motiver ce modèle, même si cela ne sert à rien pour résoudre l'exercice : $U$ et $V$ sont les longueurs du plus grand et du plus petit segment déterminés dans $[0, 1]$ par un point tiré au hasard sur le segment $[0, 1]$).

1. (a) Que vaut $\mathbb{P}(U \leqslant 1)$ ? $\mathbb{P}(U \leqslant 1/2)$ ?
   (b) Calculer la fonction de répartition de $U$.
   (c) Montrer que $U$ suit une loi uniforme que vous déterminerez.
2. Exprimer $V$ en fonction de $U$ et montrer que $V$ suit une loi uniforme que vous déterminerez.
3. Calculer $\mathbb{E}[U]$, $\mathbb{E}[V]$, $\mathrm{Var}(U)$, $\mathrm{Var}(V)$ et $\mathrm{Cov}(U, V)$.
4. Montrer que $\frac{V}{U}$ est une fonction de $U$ et calculer l'espérance de $\frac{V}{U}$.
5. Montrer que $\frac{U}{V}$ n'admet pas d'espérance finie (on pourra commencer par calculer, pour tout $\varepsilon > 0$, l'espérance de la variable $\frac{U}{V+\varepsilon}$).

## Solutions

**Exercice 1** On note $D$ l'événement « l'athlète est dopé » et $T$ l'événement « le test est positif ».

1. Par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(T|D)\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}(T|D^c)\mathbb{P}(D^c) = \big(1-\mathbb{P}(T^c|D)\big)\mathbb{P}(D)+\mathbb{P}(T|D^c)\big(1-\mathbb{P}(D)\big)\\ &= \big(1-\frac{2}{100}\big)\times\frac{1}{100}+\frac{1}{30}\times\big(1-\frac{1}{100}\big)=\frac{98\times 3+10\times 99}{30000}=\frac{1284}{30000}=\frac{428}{10000}\simeq 4\%\end{aligned}$$

2. La probabilité que l'athlète soit dopé lorsque le test est négatif est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D|T^c) &= \frac{\mathbb{P}(T^c\cap D)}{\mathbb{P}(T^c)}=\frac{\mathbb{P}(T^c|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T^c)}=\frac{\mathbb{P}(T^c|D)\mathbb{P}(D)}{1-\mathbb{P}(T)}\\ &= \frac{\frac{2}{100}\times\frac{1}{100}}{1-\frac{428}{10000}}=\frac{2}{10000-428}=\frac{2}{9572}=\frac{1}{4786}\simeq 0.02\%\end{aligned}$$

**Exercice 2** 1. La fonction génératrice est définie pour $z\in[-1,1]$ par :

$$G_X(z)=\mathbb{E}[z^X]=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)z^n=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda z)^n}{n!}=e^{\lambda(z-1)}$$

$G_X$ est deux fois dérivable (à gauche) en 1, et $G_X'(1)=\mathbb{E}[X]$, $G_X''(1)=\mathbb{E}[X(X-1)]$ donc

$$\mathbb{E}[X]=G_X'(1)=\lambda,\qquad \mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

2. (a) Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=0|X=n)\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^n}{n!}=e^{-\lambda+\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}$$

(b) $\mathbb{P}(X=0)=e^{-\lambda}$, $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(Y=0|X=0)\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=0)=e^{-\lambda}$, donc

$$e^{-\lambda}=\mathbb{P}(X=0,Y=0)\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=e^{-\lambda(1+p)}$$

ce qui montre que les v.a. $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes.

(c) Les v.a. $X$ et $Z$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tous $k,n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k,Z=n) &= \mathbb{P}(X=n+k,Y=k)=\mathbb{P}(Y=k|X=n+k)\mathbb{P}(X=n+k)\\ &= \frac{(n+k)!}{n!k!}p^k(1-p)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\times e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^n}{n!}\end{aligned}$$

(d) La loi du couple se factorise. Donc $Y$ et $Z$ sont indépendantes, $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda p$ et $Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

(e) Comme $X=Y+Z$ et $Y$ et $Z$ sont indépendantes (donc $\mathrm{Cov}(Z,Y)=0$), on a :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,Y)+\mathrm{Cov}(Z,Y)=\mathrm{Var}(Y)=\lambda p$$

**Exercice 3** 1. $p$ est une fonction positive continue. Pour qu'elle soit une densité de probabilité, il reste à vérifier que son intégrale vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=2b\int_0^{\infty}e^{-ax}dx=\frac{2b}{a}$$

Donc $p$ est une densité de probabilité ssi $b=a/2$.

2. L'espérance $\mathbb{E}[X] = 0$ car $p$ est paire donc $x \to xp(x)$ est impaire et donc
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 0$$
La variance est donc égale au second moment :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = a\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax}dx = \frac{2}{a^2}$$
3. On considère la fonction de répartition de $Y$ :
$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant y)$$
Si $y < 0$ on a $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$. Si $y \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = a\int_0^{\sqrt{y}} e^{-ax}dx = 1 - e^{-a\sqrt{y}},$$
dont la dérivée (pour tout $y > 0$) est $\frac{a}{2\sqrt{y}}e^{-a\sqrt{y}}$. On a donc
$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{y} p(z)dz$$
avec $p(y) = \frac{a}{2\sqrt{y}}e^{-a\sqrt{y}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(y)$, ce qui montre que $Y$ est à densité $p$.
4. On a simplement :
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{a^2}$$

**Exercice 4** 1. (a) $\mathbb{P}(U \leqslant 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 1, 1-X \leqslant 1) = \mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) = 1$.
$\mathbb{P}(U \leqslant 1/2) = \mathbb{P}(X \leqslant 1/2, 1-X \leqslant 1/2) = \mathbb{P}(X = 1/2) = 0$ car $X$ est à densité.
(b) Pour tout $u \in [1/2, 1]$ : $\mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}(X \leqslant u, 1-X \leqslant u) = \mathbb{P}(1-u \leqslant X \leqslant u) = 2u - 1$.
(c) On vérifie que pour tout $u \in \mathbb{R}$ :
$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \int_{-\infty}^{u} p(x)dx$$
avec $p(x) = 2\mathbf{1}_{[1/2,1]}(x)$, ce qui montre que $U$ suit une loi uniforme sur $[1/2, 1]$.
2. On a $1 - U = 1 - \max(X, 1-X) = 1 + \min(-X, -1+X) = \min(1-X, X) = V$. Donc $V$ suit une loi uniforme sur $[0, 1/2]$.
3. $\mathbb{E}[U] = 2\int_{1/2}^{1} udu = 3/4$, $\mathbb{E}[V] = 1 - \mathbb{E}[U] = 1/4$, $\mathrm{Var}(U) = 2\int_{1/2}^{1} u^2du - 9/16 = 1/48$, $\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(U)$, $\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{Cov}(U, 1) - \mathrm{Cov}(U, U) = -\mathrm{Var}(U)$.
4. On a $\frac{V}{U} = \frac{1-U}{U}$. La fonction $f : u \in [1/2, 1] \to (1-u)/u$ est continue donc
$$\mathbb{E}\Big[\frac{V}{U}\Big] = 2\int_{1/2}^{1} \frac{1-u}{u}du = 2\log(2) - 1$$
5. La fonction $f : [1/2, 1] \to u/(1-u+\epsilon)$ est continue donc
$$\mathbb{E}\Big[\frac{U}{1-U+\epsilon}\Big] = 2\int_{1/2}^{1} \frac{u}{1-u+\epsilon}du = 2\int_{\epsilon}^{1/2+\epsilon} \frac{1+\epsilon-v}{v}dv = 2(1+\epsilon)\log(1+1/(2\epsilon)) - 1$$
On a $\frac{U}{V} = \frac{U}{1-U}$, donc, pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{U}{V} \geqslant \frac{U}{1-U+\epsilon}$. Si $U/V$ avait une espérance finie, on aurait
$$\mathbb{E}\Big[\frac{U}{V}\Big] \geqslant \mathbb{E}\Big[\frac{U}{1-U+\epsilon}\Big] = 2(1+\epsilon)\log(1+1/(2\epsilon)) - 1$$
pour tout $\epsilon > 0$. Or le membre de droite tend vers $+\infty$ lorsque $\epsilon$ tend vers 0, donc $U/V$ ne peut pas avoir d'espérance finie.