

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Soit $\lambda > 0$.

1. Existe-t-il une constante $c(\lambda)$ telle que

$$\mathbb{P}(\{i\}) = c(\lambda) \frac{(i+1)\lambda^i}{i!} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N},$$

définisse une probabilité sur $\mathbb{N}$?

2. Déterminer la valeur de la constante $c(\lambda)$ telle que

$$\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = c(\lambda) \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!} \quad \text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2,$$

définisse une probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

Exercice 2 On lance 3 fois de suite un dé. Toutes les suites de trois chiffres étant supposées équiprobables, déterminer la loi de la variable aléatoire égale au nombre de valeurs distinctes obtenues.

Exercice 3 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

On tire les boules une à une sans les remettre, jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des boules de même couleur.

Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 4 On considère n individus $I_1, \dots, I_n$, maillons d'une chaîne de transmission d'une information sous la forme de « OUI » ou « NON ». I_1 la reçoit, puis la transmet à I_2 , qui la transmet à I_3 , etc., jusqu'à I_n . Chacun transmet l'information reçue correctement avec une probabilité p ($0 < p < 1$), et faussement avec probabilité $q = 1 - p$. Les réponses - justes ou erronées - des n individus sont indépendantes. Quelle est la probabilité p_n que l'information initiale soit transmise correctement ? Que se passe-t-il quand $n \rightarrow \infty$?

Exercice 5 On effectue une suite de n lancers d'une pièce à pile ou face. On suppose les lancers indépendants les uns des autres et on note p la probabilité d'obtenir pile à un lancer donné ($0 \leq p \leq 1$).

1. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.
2. Calculer la probabilité
 - (a) d'obtenir au moins un pile au cours des n lancers ($n \geq 1$),
 - (b) d'obtenir exactement k pile ($0 \leq k \leq n$),
 - (c) de n'obtenir aucun pile immédiatement suivi d'un face.
3. Décrire le nouvel espace obtenu quand on conditionne par l'événement "obtenir exactement k pile au cours des n lancers".

- On prend $n = 6$. Calculer la probabilité, sachant qu'on a obtenu exactement deux pile, que ces deux pile soient consécutifs.

Exercice 6 On effectue une suite infinie de lancers à pile ou face. On suppose les lancers indépendants les uns des autres et on note p la probabilité d'obtenir pile à un lancer donné ($0 \leq p \leq 1$).

- Calculer la probabilité que le premier pile survienne au n -ième lancer ($n \geq 1$).
- Montrer que si $p > 0$ on est sûr d'obtenir au moins un pile au cours de l'expérience.

On suppose dorénavant $p > 0$.

- Montrer que les événements "le premier pile survient au n -ième lancer" ($n \geq 1$) et "le premier pile est immédiatement suivi d'un face" sont indépendants.
- Est-ce encore le cas si on remplace le second événement par "le premier pile est immédiatement suivi de trois autres pile" ?

Exercice 7 Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on considère la probabilité géométrique de paramètre p , caractérisée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{n\}) = (1-p)p^n.$$

- Calculer, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, les probabilités des événements

$$A_q = \{k \in \mathbb{N} : k \text{ est multiple de } q\} \quad \text{et} \quad B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}.$$

- Pour quels couples d'entiers (q, n) les événements A_q et B_n sont-ils indépendants ?

Exercice 8 X étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de loi géométrique de paramètre p ($0 < p < 1$), déterminer la loi des variables aléatoires suivantes

$$Y = \min(X, N) \quad \text{et} \quad Z = \max(X, N), \quad \text{où } N \in \mathbb{N} \text{ est fixé.}$$

Exercice 9 Soit T une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[T \geq n] > 0$. On appelle taux de panne la suite $\theta(n) = \mathbb{P}[T = n | T \geq n]$, $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[T \geq n]$, puis $\mathbb{P}[T = n]$, en fonction des $(\theta(k))_{0 \leq k \leq n}$.
- Etablir qu'une suite de réels $(\theta(k))_{k \in \mathbb{N}}$ convient comme taux de panne si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta(k) < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \theta(k) = \infty.$$

- Montrer que T suit une loi géométrique si et seulement si la suite $(\theta(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante.
- Si T suit une loi géométrique, calculer, pour $n, l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[T - n = l | T \geq n]$, et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10 Soient A , B et C trois événements d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{4}{12}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3}{12}, \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{12}.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C$. Que vaut $\mathbb{E}[X]$?

Exercice 11 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n .

- On tire simultanément r jetons ($1 \leq r \leq n$), et on note X le plus grand des r numéros obtenus.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r(n+1)}{r+1} \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = \frac{r(n+1)(n-r)}{(r+2)(r+1)^2}.$$

2. On tire r jetons avec remise ($1 \leq r \leq n$), et on note encore X le plus grand numéro obtenu. Quelle est la loi de X ? On pourra calculer d'abord $\mathbb{P}[X \leq k]$, pour $1 \leq k \leq n$.

Exercice 12 Un chapeau contient 4 cartes numérotées de 1 à 4. On tire les 4 cartes les unes après les autres, sans remise et on note :

X le rang d'obtention de la carte portant le numéro 4,

Y le nombre de cartes de numéro impair obtenues avant cette dernière.

Quelle est la loi de X ? Déterminer la loi de la variable aléatoire (X, Y) . En déduire la loi de Y .

Exercice 13 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}[(m, n)] = \frac{1}{2^m 3^{n+1}}, \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien là d'une probabilité sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$.
2. Déterminer la loi de X et celle de Y . Les deux variables sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X + Y$.
4. Généraliser la question 2. au cas d'un couple de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}(m, n) = a_m b_n \quad (m, n) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 14 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = X \quad \text{si } X \neq 0, \quad Z = Y \quad \text{sinon.}$$

Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 15 Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$; n étant un entier fixé, $n \geq 2$, on note X et Y respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de Z par n .

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois de X et de Y ainsi que l'indépendance de ces deux variables.

Exercice 16 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois géométriques de paramètres respectifs p et q .

1. Déterminer la loi du couple $(X - Y, \min(X, Y))$.
2. Les deux variables $X - Y$ et $\min(X, Y)$ sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}[X = Y]$ et $\mathbb{P}[X \geq Y]$.
4. Déterminer les lois des variables $X + Y$, $\max(X, Y)$, $|X - Y|$.

Exercice 17 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0)\}$.

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 18 Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $p_i = \mathbb{P}[A_i]$ et $q_{ij} = \mathbb{P}[A_i \cap A_j]$ pour i, j tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

On définit $X = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$. Dans quel ensemble la variable aléatoire X prend-elle ses valeurs ?

Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ et $\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n p_i - \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij}$.

Exercice 19 On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte numéro k ($1 \leq k \leq n$) contient k jetons numérotés de 1 à k . On choisit une boîte au hasard, puis on tire un jeton de cette boîte.

On note X le numéro de la boîte et Y le numéro du jeton.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Calculer $\mathbb{P}[X = Y]$.
3. Déterminer la loi de Y , son espérance, sa variance.

Exercice 20 (Loi hypergéométrique) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . Les k boules portant les numéros de 1 à k ($1 \leq k \leq n-1$) sont rouges, toutes les autres sont blanches. On tire une à une sans remise toutes les boules de l'urne. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit X_i par : $X_i = 1$ si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge, 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_i . Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ et $\text{Var}[X_i]$.
2. Si $i \neq j$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. Pour tout $1 \leq r \leq n$, on pose $S_r = \sum_{i=1}^r X_i$. Que représente S_r ? Déterminer la loi de S_r .

Calculer $\mathbb{E}[S_r]$ et $\text{Var}[S_r]$. En déduire l'identité

$$\sum_{l=0}^r l \binom{r}{l} \binom{n-r}{k-l} = \frac{kr}{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 21 On joue à pile ou face avec une pièce ayant une probabilité p de tomber sur pile, $1-p$ de tomber sur face. On suppose les lancers successifs indépendants et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k le temps d'attente du $k^{\text{ème}}$ pile.

1. Donner la loi de la variable T_k .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j>n} \binom{j-1}{k-1} p^k (1-p)^{j-k} = \sum_{0 \leq l < k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}.$$

On remarquera que, si S_n est le nombre d'apparitions de pile au cours des n premiers lancers, on a $\{T_k > n\} = \{S_n < k\}$, égalité que l'on justifiera.

Exercice 22 Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer $\mathbb{E} \left[\frac{1}{X+1} \right]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X^4]$ en se servant de la fonction génératrice de X .