

Examen du 31 mai 2021

Documents, calculatrices, téléphones mobiles et ordinateurs portables sont strictement prohibés. Une attention particulière sera portée à la rigueur du raisonnement et à la qualité de la rédaction. Les formules et hypothèses utilisées doivent être indiquées. Le barème est donné à titre indicatif.

La durée de l'examen était de 2h.

Nous donnons ci-dessous quelques réponses. Elles ne sont *pas* rédigées comme on le demande à l'examen.

Exercice 1. Questions de cours. Pour cet exercice on ne demande aucune justification.

/4 pts

1. Donner une condition suffisante pour que trois variables aléatoires X , Y et Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ soient indépendantes.
2. Donner un exemple de variable aléatoire dont l'espérance n'a pas de sens.
3. Énoncer l'inégalité de Markov (y compris toutes ses hypothèses).
4. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X réelle.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique (sur $\mathbb{N}$) de paramètre $p \in (0, 1)$.

/6 pts

1. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) = (1 - p)^n = \mathbb{P}(Y \geq n).$$

On a :

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k p = \frac{(1-p)^n}{1 - (1-p)} p = (1-p)^n,$$

où on a utilisé le fait que $p < 1$.

- (b) En déduire que $\mathbb{P}(Y \geq X) = \frac{1}{2-p}$ et $\mathbb{P}(Y > X) = \frac{1-p}{2-p}$.

On a : $\{Y \geq X\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Y \geq n\} \cap \{X = n\}$. Puisque cette union est disjointe, on a :

$$\mathbb{P}(Y \geq X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y \geq n, X = n).$$

Or X et Y sont indépendantes et loi géométrique de paramètre p . Donc :

$$\mathbb{P}(Y \geq X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y \geq n) \mathbb{P}(X = n).$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(Y \geq X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^{2n} p = \frac{p}{1 - (1-p)^2} = \frac{1}{2-p}.$$

De même :

$$\mathbb{P}(Y > X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(Y > n, X = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-p)^{n+1} p = \frac{1-p}{2-p}.$$

(c) En conclure que $\mathbb{P}(Y = X) = \frac{p}{2-p}$.

$$\mathbb{P}(Y = X) = \mathbb{P}(Y \geq X) - \mathbb{P}(Y > X) = \frac{1}{2-p} - \frac{1-p}{2-p} = \frac{p}{2-p}.$$

2. On définit les variables aléatoires U et V par : $V = \max(X, Y)$ et $U = \min(X, Y)$.

(a) Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U \geq u, V \leq v) = \mathbb{P}(u \leq X \leq v)^2.$$

On a :

$$\mathbb{P}(U \geq u, V \leq v) = \mathbb{P}(u \leq X \leq v, u \leq Y \leq v).$$

Par indépendance et puisque X et Y ont même loi :

$$\mathbb{P}(U \geq u, V \leq v) = \mathbb{P}(u \leq X \leq v, u \leq Y \leq v) = \mathbb{P}(u \leq X \leq v)^2.$$

(b) En déduire que pour tout $u, v \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U \geq u, V \leq v) = \begin{cases} (q^u - q^{v+1})^2 & \text{si } u \leq v \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $q = 1 - p$.

Si $u \leq v$, on a

$$\mathbb{P}(u \leq X \leq v) = \mathbb{P}(X \geq u) - \mathbb{P}(X > v) = (1 - p)^u - (1 - p)^{v+1}.$$

(c) Montrer que pour tout $v \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = (1 - q^{v+1})^2$$

et en déduire la loi de V .

On prend $u = 0$ dans la question précédente. Puisque $\{U \geq 0\} = \Omega$,

$$\mathbb{P}(V \leq v) = (1 - q^{v+1})^2.$$

Or

$$\mathbb{P}(V = v) = \mathbb{P}(V \leq v) - \mathbb{P}(V < v) = (1 - q^{v+1})^2 - (1 - q^v)^2.$$

(d) Justifier soigneusement que pour tout $u \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U \geq u) = q^{2u}.$$

En déduire la loi de U et l'identifier.

La suite d'événements $(\{V \geq v\} \cap \{U \leq u\})_{u \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. D'où :

$$\mathbb{P}(V \geq v) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V \geq v, U \leq u).$$

Or $\mathbb{P}(V \geq v, U \leq u) = (q^u - q^{v+1})^2$ pour tout $v \geq u$ et $q < 1$. Donc

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V \geq v, U \leq u) = q^{2v}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

Veuillez tourner la page.

Exercice 3. On répartit un groupe de 10 personnes numérotées de 1 à 10 dans deux voitures V_1 et V_2 , pouvant accueillir respectivement 4 et 6 personnes. /5 pts

1. Combien y a-t-il de possibilités dans les cas suivants :

- (a) On ne distingue pas les places à l'intérieur des voitures (c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'à savoir qui va dans quelle voiture).

$$C_{10}^4$$

- (b) On distingue toutes les places dans chaque voiture.

$$10!$$

- (c) On distingue dans chaque voiture un chauffeur (c'est-à-dire qu'on veut savoir qui va dans quelle voiture, et qui conduit chacune des voitures, mais qu'on ne distingue pas les places des passagers).

$$4 \cdot 6 \cdot C_{10}^4$$

- (d) (Plus difficile). Mêmes règles qu'au point (c), mais les personnes 1 et 2 ne savent pas conduire et ne peuvent pas être chauffeur.

$$A_8^2 C_8^3$$

Pour la suite de cet exercice, on se place dans le cas (a) ci-dessus.

2. Soit A l'événement "La personne 1 va dans la voiture V_1 ", et soit B l'événement "Les personnes 1 et 2 vont dans la même voiture".

- (a) Que valent $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B|A)$ et $\mathbb{P}(B|A^c)$?

$$4/10, 3/9, 5/9$$

- (b) Calculer $\mathbb{P}(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

$$\text{Proba tot } P(B) = \frac{4}{10} \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \frac{5}{9} = \frac{7}{15} \text{ on retrouve d'ailleurs } (C_8^2 + C_8^4)/C_{10}^4 \text{ (choisir les autres dans la voiture avec eux). Pas indép.}$$

- (c) Quelle est la probabilité que la personne 1 aille dans la voiture V_1 sachant que les personnes 1 et 2 sont dans la même voiture ?

$$\text{Bayes, } \frac{2}{7}$$

Exercice 4. On considère un groupe de 10 personnes numérotées de 1 à 10. Chacune de ces personnes a, chez elle, un certain nombre de chats et un certain nombre de chiens, selon la répartition suivante : /5 pts

Personne	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10
Nombre de chats	0	0	0	0	1	2	1	1	1	1
Nombre de chiens	0	1	1	2	1	1	2	2	2	2

On choisit au hasard une personne dans ce groupe et on note X la variable aléatoire représentant le nombre de chats de la personne choisie et Y la variable aléatoire représentant le nombre de chiens.

1. Donner la loi jointe du couple (X, Y) et la loi marginale de X et de Y .

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	1/10	2/10	1/10	4/10
1	0	1/10	4/10	5/10
2	0	1/10	0	1/10
	1/10	4/10	5/10	1

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Non, par ex $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = P(X = 2)P(Y = 2)$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ $= 7/10$, $\mathbb{E}(Y)$ $= 14/10$, $\mathbb{E}(-2X + Y - 1)$ $= -2 + 1 - 1 = -1$

4. Calculer $\text{Var}(X)$, $\text{Var}\left(1 - \frac{X}{2}\right)$, $\text{Var}(Y)$.

$E(X^2) = \frac{9}{10}$, $\text{Var}(X) = \frac{41}{100}$, $\text{Var}\left(1 - \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{4}\text{Var}(X) = \frac{41}{400}$, $E(Y^2) = \frac{24}{10}$, $\text{Var}(Y) = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

5. Calculer $\mathbb{E}(XY)$, $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.

$\mathbb{E}(XY) = \frac{11}{10}$, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{25}$ et $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$

6. Calculer $\text{Var}(X + Y)$ $= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{109}{100}$.

7. Sur le groupe de 10 personnes décrit ici, peut-on dire que plus on a de chats, plus on a tendance à avoir un grand nombre de chiens ?

Oui.