Examen

Seconde session

Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 1 juillet 2020. Le barème est donné dans la marge à titre indicatif.

Exercice 1. Algorithme DPLL

Considérons la formule propositionnelle φ_1 ci-dessous.

$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \big(\neg(P \Rightarrow (Q \vee R)) \vee ((\neg Q \Rightarrow \neg P) \wedge (R \Rightarrow Q))\big)\ .$$

[1] (a) Mettre φ_1 sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$.

[1] (b) Mettre $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$ sous forme clausale.

[2] (c) Appliquer l'algorithme DPLL à la formule obtenue en (b). Plus précisément, dessiner un arbre de recherche DPLL comme vu en cours (c.f. figures 15 à 18 des notes de cours).

Exercice 2. Calcul des séquents propositionnel

Considérons la formule propositionnelle φ_2 ci-dessous.

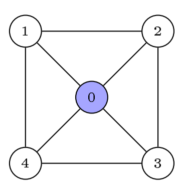
$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \big((P \Rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \Rightarrow (P \wedge R))\big)\ .$$

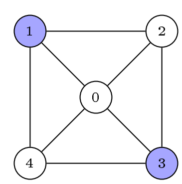
[1] (a) Mettre φ_2 sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$.

[2] (b) Faire une recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel vu en cours sur la formule $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$ obtenue en (b).

Exercice 3. Modélisation en logique propositionnelle

Le problème qui nous intéresse est le problème d'ensemble indépendant dans un graphe. L'entrée du problème est un graphe non orienté $G = (V, E)$ où V est son ensemble de sommets et E son ensemble d'arêtes. Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est *indépendant* de G s'il n'existe pas d'arête qui relie deux sommets de S ; il est de plus *maximal* si $S \cup \{v\}$ n'est pas indépendant quand $v \in V \setminus S$. Par exemple, dans le graphe ci-dessous, les ensembles des sommets en bleu forment dans les deux cas un ensemble indépendant maximal.





On souhaite modéliser la recherche d'ensembles indépendants dans un graphe à l'aide d'une formule propositionnelle. On se donne pour cela un graphe non orienté $G = (V, E)$ et on va utiliser les propositions P_v pour $v \in V$. Pour une interprétation I, l'interprétation de ces propositions va définir l'ensemble de sommets $S_I \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid P^I = \top\}$.

[1] (a) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\mathrm{ind}}$ telle que $I \vDash \varphi_{3,\mathrm{ind}}$ si et seulement si S_I est un ensemble indépendant de G.

[1] (b) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\mathrm{max}}$ telle que $I \vDash \varphi_{3,\mathrm{ind}} \wedge \varphi_{3,\mathrm{max}}$ si et seulement si S_I est un ensemble indépendant maximal de G.

[1] (c) Soit $k > 0$ un entier. Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\geq k}$ telle que $I \models \varphi_{3,\mathrm{ind}} \wedge \varphi_{3,\geq k}$ si et seulement si S_I est un ensemble indépendant de G contenant au moins k sommets.

[3,5 (bonus)] (d) Si vous avez répondu à la question (c) en utilisant ce que vous avez vu à l'exercice 1 du TD 4, il y a des chances pour que votre formule ne soit pas utilisable dans un solveur SAT : pourquoi ?

Pour remédier à ce problème, on va changer de modélisation. Une fonction $f\colon \{1,\ldots,k\} \to V$ est un *témoin de k-indépendance* si f est injective et $S_f \stackrel{\text{def}}{=} \{f(i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ est un ensemble indépendant de G. Oublions les propositions P_v ; on va utiliser maintenant des propositions $Q_{i,v}$ pour $i \in \{1,\ldots,k\}$ et $v \in G$ pour décrire le fait que $f(i) = v$.

Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,f}$ qui est satisfiable si et seulement s'il existe un témoin de k-indépendance.

Exercice 4. Modèle en logique du premier ordre

On considère dans cet exercice la signature du premier ordre $L \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{E^{(2)}, =^{(2)}\}$. Une interprétation I de domaine D_I sur cette signature peut être vue comme un graphe dirigé avec D_I pour ensemble de sommets et E^I pour ensemble d'arcs.

Pour les formules de la logique du premier ordre suivante, indiquez si la formule est satisfiable ou non. Dans le cas où elle est satisfiable, dessinez une interprétation et donnez une valuation des variables libres qui la satisfont. Dans le cas où elle est insatisfiable, démontrez-le par la méthode de votre choix.

[1] (a) $\varphi_{4,a} \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\forall y.\neg(x = y)$

[1] (b) $\varphi_{4,b} \stackrel{\text{def}}{=} \forall y.\forall z.E(x,y) \wedge \neg E(x,z)$

[1] (c) $\varphi_{4,c} \stackrel{\text{def}}{=} \exists y.\forall z.E(x,y) \wedge (E(x,z) \Rightarrow y = z)$

Exercice 5. Théorie des ensembles [3]

On se place dans une théorie axiomatique des ensemble notée $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{ens}})$. On travaille pour cela sur la signature du premier ordre $L \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\in^{(2)}\}$. Dans une interprétation I sur cette signature, on appellera les éléments de D_I des « ensembles », et si (a,b) est une paire de $\in^I$ (ce qu'on notera « $a \in^I b$ »), on dira que a « appartient à » b ou a « est un élément de » b. On pourra écrire « $a \subseteq^I b$ » et dire que b « est un sur-ensemble de » a si, pour tout ensemble $c \in^I a$, on a $c \in^I b$.

L'ensemble d'axiomes A_{ens} comprend les deux formules closes suivantes :

$$\varphi_{\text{paire-min}} \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\forall y.\exists z.x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w.w \in z \Rightarrow \big((\forall u.u \in x \Rightarrow u \in w) \vee (\forall v.v \in y \Rightarrow v \in w)\big)$$

(axiome de la paire minimale)

autrement dit, si x et y sont des ensembles, alors il existe un ensemble z auquel ils appartiennent tous les deux, et tel que tous les éléments w de z sont des sur-ensembles de x ou de y ;

$$\varphi_{\text{fondation}} \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.(\exists z.z \in x) \Rightarrow (\exists y.y \in x \wedge \neg(\exists z.z \in x \wedge z \in y))$$

(axiome de fondation)

autrement dit, tout ensemble non vide x contient un élément y tel que x et y soient des ensembles disjoints.

Montrez que la formule φ_5 donnée ci-dessous (qui dit qu'aucun ensemble n'est un élément de lui-même) appartient à la théorie $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{ens}})$:

$$\varphi_5 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x.\neg(x \in x)$$

[2] **Exercice 6.** Calcul des séquents

On souhaite vérifier que l'inférence est valide dans le syllogisme « Tous les rois portent une couronne, or aucun de ceux qui portent une couronne n'est un serf, donc aucun serf n'est roi ». On considère pour cela la signature du premier ordre définie par $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{R^{(1)}, C^{(1)}, S^{(1)}\}$ où la relation unaire R représente « être roi », la relation unaire C représente « porter une couronne » et la relation unaire S représente « être un roi ». On peut alors traduire « tous les rois portent une couronne » par $\forall x.R(x) \Rightarrow C(x)$, « aucun de ceux qui portent une couronne n'est un serf » par $\forall x.C(x) \Rightarrow \neg S(x)$, et « aucun serf n'est roi » par $\forall x.S(x) \Rightarrow \neg R(x)$.

Montrer que la formule φ_6 ci-dessous est valide, en en fournissant une dérivation dans le calcul des séquents.

$$\varphi_6 \stackrel{\text{def}}{=} \big((\forall x.R(x) \Rightarrow C(x)) \land (\forall x.C(x) \Rightarrow \neg S(x))\big) \Rightarrow (\forall x.S(x) \Rightarrow \neg R(x))$$