# Examen
## Première session

*Devoir maison à rendre sur la page moodle du cours pour le 14 février 2020. Le barème est donné dans la marge à titre indicatif.*

**Exercice 1.** Algorithme DPLL

Considérons la formule propositionnelle $\varphi_1$ ci-dessous.

$$\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \big((P_2 \Rightarrow P_1) \Rightarrow P_3\big) \wedge \neg P_3 \wedge \big(P_2 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)\big) .$$

[1] (a) Mettre $\varphi_1$ sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$.

[1] (b) Mettre $\mathrm{nnf}(\varphi_1)$ sous forme clausale.

[2] (c) Appliquer l'algorithme DPLL à la formule obtenue en (b). Plus précisément, dessiner un arbre de recherche DPLL comme vu en cours (c.f. figures 15 à 18 des notes de cours).

**Exercice 2.** Calcul des séquents propositionnel

Considérons la formule propositionnelle $\varphi_2$ ci-dessous.

$$\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \big((P_2 \Rightarrow P_1) \wedge \neg P_3\big) \vee \big((P_2 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)) \Rightarrow P_3\big) .$$

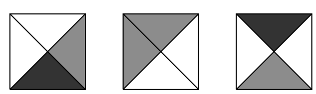
[1] (a) Mettre $\varphi_2$ sous forme normale négative : calculer $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$.

[2] (b) Faire une recherche de preuve dans le calcul des séquents propositionnel vu en cours sur la formule $\mathrm{nnf}(\varphi_2)$ obtenue en (b).

[1 (bonus)] (c) Quel lien y a-t-il entre les résultats obtenus à la question (c) de l'exercice 1 et à la question (b) de cet exercice ?

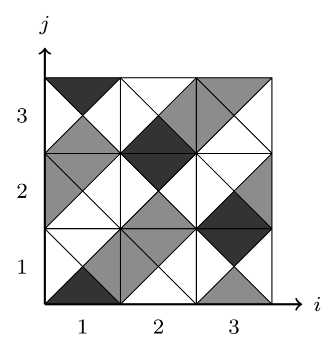
**Exercice 3.** Modélisation en logique propositionnelle

Le problème qui nous intéresse est le problème de *pavage carré*. L'entrée du problème est un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et un *catalogue*, qui est un ensemble fini $C$ de *tuiles* carrées avec une couleur par côté comme les trois tuiles $t_0$, $t_1$ et $t_2$ ci-dessous :



$t_0$ $t_1$ $t_2$

Le but pour un catalogue $C$ donné est de déterminer s'il est possible de couvrir un carré de dimension $n \times n$ en respectant les couleurs. On peut pour cela réutiliser les tuiles du catalogue, mais celles-ci ne peuvent pas être tournées. Voici ci-dessous un exemple de pavage $3 \times 3$ avec le catalogue $C \stackrel{\text{def}}{=} \{t_0, t_1, t_2\}$ :



Formellement, un catalogue $C$ est associé à deux relations binaires $H \subseteq C \times C$ de contraintes horizontales et $V \subseteq C \times C$ de contraintes verticales, où $(t, t') \in H$ si la couleur de droite de $t$ est la même que la couleur de gauche de $t'$ et $(t, t') \in V$ si la couleur du haut de $t$ est la même que la couleur du bas de $t'$. Par exemple, pour notre catalogue $C \stackrel{\text{def}}{=} \{t_0, t_1, t_2\}$, on a les contraintes suivantes :

$$H = \{(t_0, t_1), (t_1, t_0), (t_1, t_2), (t_2, t_0), (t_2, t_2)\} , \qquad V = \{(t_0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_0)\} .$$

Un *pavage carré de dimension $n$ par $C$* est alors une fonction $p\colon (\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}) \to C$ telle que

1. pour tout $1 \leq i < n$ et $1 \leq j \leq n$, si $p(i, j) = t$ et $p(i + 1, j) = t'$ alors $(t, t') \in H$ et
2. pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j < n$, si $p(i, j) = t$ et $p(i, j + 1) = t'$ alors $(t, t') \in V$.

Fixons un catalogue $C$ avec ses relations $H$ et $V$ ainsi qu'une dimension $n$. Notre objectif est d'écrire une formule propositionnelle $\varphi_3$ (qui dépend de $C$, $H$, $V$ et $n$) telle que $\varphi_3$ soit satisfiable si et seulement s'il existe un pavage carré de dimension $n$ par $C$. On utilisera pour cela des propositions $P_{i,j,t}$ où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $t \in C$, qui exprimeront le fait que $p(i, j) = t$ dans notre pavage. Dans les questions suivantes, on cherche des formules propositionnelles qui dépendent de $C$, $H$, $V$, et $n$.

[1] (a) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\geq 1}$ qui impose que chaque case du carré $n \times n$ reçoit au moins une tuile.

[1] (b) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,\leq 1}$ qui impose que chaque case du carré $n \times n$ reçoit au plus une tuile.

[1,5] (c) Écrire une formule propositionnelle $\varphi_{3,H}$ qui impose que deux cases adjacentes horizontalement du carré $n \times n$ respectent la contrainte $H$ et une formule propositionnelle $\varphi_{3,V}$ qui impose que deux cases adjacentes verticalement du carré $n \times n$ respectent la contrainte $V$.

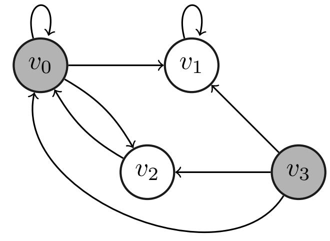
[0,5] (d) Écrire la formule propositionnelle $\varphi_3$ en utilisant les réponses précédentes.

**Exercice 4.** Modèle en logique du premier ordre

On considère dans cet exercice la signature du premier ordre $L \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{E^{(2)}, =^{(2)}, G^{(1)}\}$. Soit l'interprétation $I$ de domaine $D_I \stackrel{\text{def}}{=} \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ avec

$$\begin{aligned}
E^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{(v_0, v_0), (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_1), (v_2, v_0), (v_3, v_0), (v_3, v_1), (v_3, v_2)\} ,\\
=^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{(v_0, v_0), (v_1, v_1), (v_2, v_2), (v_3, v_3)\} ,\\
G^I &\stackrel{\text{def}}{=} \{v_0, v_3\} .
\end{aligned}$$

On peut voir $I$ comme le graphe dirigé colorié ci-dessous, où « $E$ » dénote la relation d'adjacence, « $G$ » dénote les sommets gris et « $=$ » est l'égalité.




[1] (a) Est-ce que $I$ est un modèle de la formule $\varphi_{4,a} \stackrel{\text{def}}{=} \big(E(x, y) \wedge E(y, z)\big) \Rightarrow E(x, z)$ ? Justifiez.

[1] (b) Est-ce que $I$ est un modèle de la formule $\varphi_{4,b} \stackrel{\text{def}}{=} G(x) \Leftrightarrow \big(\forall y \,.\, (E(x, y) \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow \neg G(y)\big)$ ? Justifiez.

[2] (c) Écrivez une formule $\varphi_{4,\text{c}}$ qui exprime le fait que tous les sommets non gris de $I$ ont un degré sortant de 1. L'interprétation $I$ est-elle un modèle de votre formule ? Justifiez.

[3] **Exercice 5.** Théorie des ordres linéaires stricts

On se place dans la théorie $\mathrm{Th}(A_{\mathrm{ols}})$ des ordres linéaires stricts de l'exemple 14.4 des notes de cours. Montrer que la formule $\varphi_5$ donnée ci-dessous appartient à cette théorie :

$$\varphi_5 \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \exists y.\big(\neg(y < x) \Rightarrow \forall z.(x < z \vee x = z)\big)$$

[2] **Exercice 6.** Calcul des séquents

On souhaite vérifier que l'inférence est valide dans le syllogisme « Tous les humains sont mortels, or Socrate est humain, donc Socrate est mortel ». On considère pour cela la signature du premier ordre définie par $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{s^{(0)}\}$ et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{H^{(1)}, M^{(1)}\}$ où la constante $s$ représente « Socrate », la relation unaire $H$ représente « être humain » et la relation unaire $M$ représente « être mortel ». On peut alors traduire « tous les humains sont mortels » par $\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)$, « Socrate est humain » par $H(s)$, et « Socrate est mortel » par $M(s)$.

Montrer que la formule $\varphi_6$ ci-dessous est valide, en en fournissant une dérivation dans le calcul des séquents.

$$\varphi_6 \stackrel{\text{def}}{=} \big((\forall x.H(x) \Rightarrow M(x)) \wedge H(s)\big) \Rightarrow M(s)$$