Contrôle Continu. NOM, Prénom :

Consignes. *Durée 30'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1 *Dans cet exercice on étudie la contrainte :*

$$\Sigma_{i=1,\ldots,n} x_i = (x_1 + \cdots + x_n) \geq 2$$

où $x_i \in \mathbf{2} = \{0,1\}$.

1. *Construisez une formule* A *du calcul propositionnel telle que* $var(A) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *et* $v \models A$ *ssi* $\Sigma_{i=1,\ldots,n} v(x_i) \geq 2$. *La formule* A *devrait avoir une taille polynomiale en* n.

   SOLUTION *On pose :*
   $$A = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \wedge x_j) \ .$$
   On a :
   $$v \models A \ ssi \ \exists i < j \ \ v(x_i) = v(x_j) = 1 \ ssi \ \Sigma_{k=1,\ldots,n} v(x_i) \geq 2 \ .$$
   Et A *est composée de* $n(n-1)/2$ *monomes de 2 littéraux.*

2. *Votre formule est-elle une CNF ? Sinon, expliquez comment on peut construire une formule CNF* B *dont la taille est polynomiale en la taille de* A *et telle que* $var(B) \supseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ *et* $v \models B$ *ssi* $\Sigma_{i=1,\ldots,n} v(x_i) \geq 2$.

   SOLUTION *On applique la méthode de Tseitin (chapitre 4). On pose :*
   $$B' = (\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (y_{i,j} \leftrightarrow (x_i \wedge x_j)) \ .$$
   On note l'équivalence logique :
   $$(y_{i,j} \leftrightarrow (x_i \wedge x_j) \equiv (\neg y_{i,j} \vee x_i) \wedge (\neg y_{i,j} \vee x_j) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_j \vee y_{i,j}) = C_{i,j}$$
   La formule recherchée est donc :
   $$B = (\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} C_{i,j}$$
   dont la taille est polynomiale en la taille de A.

3. *Soit* $f_n : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$ *une fonction telle que :* $f_n(c_1, \ldots, c_n) = 1$ *ssi* $\Sigma_{i=1,\ldots,n} c_i \geq 2$. *Construisez un BDD réduit qui définit la fonction* f_3 *(avec* 3 *arguments donc).*

   SOLUTION *Le BDD réduit a : 1 noeud étiqueté* x_1*, 2 noeuds étiquetés* x_2 *et 1 noeud étiqueté* x_3.

4. *Pouvez-vous donner une borne supérieure polynomiale en* n *au nombre de noeuds d'un BDD réduit qui définit la fonction* f_n *(pour un* n *arbitraire donc) ?*

   SOLUTION *La fonction* f_n *est symétrique. On sait (chapitre 6) que ces fonctions ont un BDD réduit dont la taille est* $O(n^2)$. *Pour la fonction en question on peut même montrer que la taille est* $O(n)$ *: 1 noeud étiqueté* x_1*, 2 noeuds étiquetés* x_i *pour* $i = 2, \ldots, n-1$*, 1 noeud étiqueté* x_n.