Contrôle Continu. NOM, Prénom :

Consignes. *Durée 30'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1 *Ci-dessous vous trouverez une description d'ensembles de formules et pour chaque ensemble un exemple de formule dans l'ensemble. Pour chaque ensemble vous devez : (1) décrire de façon succinte le meilleur algorithme que vous connaissez qui peut déterminer si une formule de l'ensemble est réfutable en précisant si l'algorithme est efficace (temps polynomial dans la taille de la formule) et (2) appliquer l'algorithme décrit à la formule donnée en exemple. NB Il est inutile : (i) de répondre à (2) sans répondre à (1), (ii) de répondre à (1) et ensuite d'appliquer dans (2) une méthode différente de celle décrite dans (1) et (iii) d'appliquer une méthode exponentielle dans un cas où une méthode polynomiale est connue.*

1. *CNF : formules qui sont une conjonction de clauses.*

$$(x \lor y \lor \neg z) \land (x \lor y \lor w \lor z) \land (x \lor \neg y \lor w) \land (\neg x \lor \neg z).$$

   Solution *1 On peut appliquer la méthode de résolution (ou la méthode DP) qui en général prend un temps exponentiel. Mais dans le cas en question le calcul est très facile car on a une suite de variables monotones :*

$$\begin{array}{ll} (x \lor y \lor \neg z) \land (\neg x \lor \neg z) & (\textit{car } w \textit{ monotone}) \\ (\neg x \lor \neg z) & (\textit{car } y \textit{ monotone}) \\ \emptyset & (\textit{car } \neg x \textit{ monotone}) \end{array}$$

   La formule est satisfaisable.

2. *XCNF : formules qui sont une conjonction de clauses exclusives où une clause exclusive est une disjonction exclusive (xor) de littéraux.*

$$(x \oplus y \oplus \neg z) \land (x \oplus y \oplus w \oplus z) \land (x \oplus \neg y \oplus w) \land (\neg x \oplus \neg z).$$

   Solution *2 Il y a une traduction directe d'une XCNF en un système d'équations linéaires sur $\mathbf{Z}_2$ qui peut être résolu avec la méthode de Gauss qui est polynomiale. Dans le cas en question en suivant l'ordre alphabétique des variables x, y, w, z on obtient :*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

   On a donc une solution pour $z = 1$, $w = 1$, $y = 1$ et $x = 0$. La formule est satisfaisable.

3. *DNF : formules qui sont une disjonction de monômes.*

$$(x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land \neg y \land z) \lor (x \land \neg y \land w) \lor (z \land \neg z).$$

   Solution *3. Une DNF est réfutable ssi tous les monômes sont réfutables. Et un monôme est réfutable ssi il contient une variable et sa négation ; une condition qu'on vérifie en temps linéaire. Donc la DNF en question est satisfaisable.*

4. *3-CNF : formules dans CNF où chaque clause a au plus 3-littéraux.*

$$(x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y) \wedge \neg x \ .$$

SOLUTION *4. Pour les 3-CNF on applique aussi la méthode de résolution (ou la méthode DP). On sait que si on avait une méthode efficace pour 3-CNF on l'aurait aussi pour CNF. Ici* $\neg x$ *est unitaire et on obtient :*

$$(y \vee \neg z) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg y) \ .$$

Maintenant $\neg y$ *est unitaire et on obtient :*

$$\neg z \wedge z$$

d'où on dérive la clause vide. La formule est donc réfutable.

5. *Formules de Horn : formules dans CNF où dans chaque clause il y a au plus un littéral positif (sans négation).*

$$(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg w \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg w) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg w) \wedge w.$$

SOLUTION *5. Pour les formules de Horn on peut appliquer la méthode de résolution (ou la méthode DP) en sachant que si on arrive au dernier cas (6) on sait que la formule est satisfaisble. La méthode est alors polynomiale. Dans le cas en question,* w *est unitaire et on dérive :*

$$(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y).$$

Comme il n'y a pas de clause unitaire (ni de clause vide) on peut satisfaire la CNF simplement en affectant 0 *à toutes les variables.*

6. *2-CNF : formules dans CNF où chaque clause a au plus 2-littéraux. Dans l'exemple ci-dessous, on utilise la notation ensembliste pour les CNF et on abrège* x_i *en* i *et* $\neg x_i$ *en* $\bar{i}$ *(la formule contient donc* 6 *variables et* 12 *clauses) :*

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{\bar{1},\bar{3}\},\{\bar{1},\bar{5}\},\{\bar{3},\bar{5}\},\{\bar{2},\bar{4}\},\{\bar{2},\bar{6}\},\{\bar{4},\bar{6}\},\{\bar{1},\bar{2}\},\{\bar{3},\bar{4}\},\{\bar{5},\bar{6}\}\}$$

SOLUTION *6. Dans ce cas on peut appliquer la méthode de résolution en sachant que chaque fois qu'on va résoudre une variable on va générer des clauses qui ont au plus deux littéraux. La taille de la formule reste donc polynomiale et la méthode de résolution appliquée à une CNF termine en temps polynomial. On peut aussi appliquer la méthode polynomiale qui construit un graphe et recherche un circuit qui passe par une variable et sa négation (chapitre 5).*
— *En éliminant* 1 : $\{\{3,4\},\{5,6\},\{2,\bar{3}\},\{2,\bar{5}\},\{\bar{3},\bar{5}\},\{\bar{2},\bar{4}\},\{\bar{2},\bar{6}\},\{\bar{4},\bar{6}\},\{\bar{3},\bar{4}\},\{\bar{5},\bar{6}\}\}$,
— *En éliminant* 3 : $\{\{5,6\},\{2,4\},\{2,\bar{5}\},\{4,\bar{5}\},\{\bar{2},\bar{4}\},\{\bar{2},\bar{6}\},\{\bar{4},\bar{6}\},\{\bar{5},\bar{6}\}\}$,
— *En éliminant* 5 : $\{\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{\bar{2},\bar{4}\},\{\bar{2},\bar{6}\},\{\bar{4},\bar{6}\}\}$,
— *En éliminant* 2 : $\{\{4,\bar{6}\},\{\bar{4},6\},\{4,6\},\{\bar{4},\bar{6}\}\}$,
— *En éliminant* 4 : $\{\{\bar{6}\},\{6\}\}$,
qui produit la clause vide. La 2-CNF est donc réfutable et les connaisseurs auront reconnu la formule pour 3 *chaussettes et* 2 *tiroirs.*