Contrôle Continu. NOM, Prénom:

Consignes. *Durée 30'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1 *On rappelle un fragment du calcul des séquents.*

$$(Ax) \qquad \frac{}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$(\vee \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vdash \vee) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$$

$$(\neg \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad (\vdash \neg) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$$

Une règle est correcte si la validité des hypothèses (les séquents au dessus de la barre) implique toujours la validité de la conclusion (le séquent sous la barre). Un séquent $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$, $n, m \geq 0$ *est valide si la formule* $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ *est valide. Une formule* A *est valide si pour toute affectation* v, $[\![A]\!]v = 1$. *La hauteur d'une preuve est le nombre maximum de règles qu'il faut appliquer pour aller du séquent prouvé (la racine de l'arbre de preuve) à un axiome (une feuille de l'arbre). Voici* 3 *assertions, pour chaque assertion donnez une preuve ou expliquez pourquoi elle est fausse.*

1 On peut construire une preuve du séquent $\neg\neg x \vdash x$ *de hauteur au plus* 5.

Solution *1. Vrai.*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x \vdash x}}{\vdash \neg x, x}}{\neg\neg x \vdash x}$$

2 On peut construire une preuve du séquent $\vdash (x \vee \neg x)$.

Solution *2. Vrai.*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x \vdash x}}{\vdash \neg x, x}}{\vdash \neg x \vee x}$$

3 On peut construire une preuve du séquent $x \vdash \neg\neg x$ *de hauteur au plus* 5.

Solution *3. Vrai.*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{x \vdash x}}{x, \neg x \vdash}}{x \vdash \neg\neg x}$$

On considère maintenant une interprétation des formules sur un ensemble $\mathbf{3} = \{0, ?, 1\}$ *qui est équipé d'un ordre total* $<$ *tel que* $0 < ? < 1$ *(*0 *est donc le minimum,* 1 *le maximum et* ? *est strictement compris entre* 0 *et* 1*). On interprète la formule* $\mathbf{0}$ *par* 0, *la formule* $\mathbf{1}$ *par* 1, *la conjonction* $\wedge$ *par la fonction binaire minimum, la disjonction* $\vee$ *par la fonction binaire maximum, l'implication* $\to$ *par une fonction binaire* $\Rightarrow_3$ *telle que:*

$$\Rightarrow_3 (x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leq y \textit{ dans l'ordre sur } \mathbf{3} \\ 0 & \textit{autrement,} \end{cases}$$

et on considère que $\neg A$ est une abréviation pour $(A \to \mathbf{0})$. Les définitions de validité s'adaptent à cette nouvelle interprétation. En particulier, on dira qu'un séquent $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$ est valide si pour toute affectation v de l'ensemble des variables à l'ensemble $\mathbf{3}$ on a que: $[\![(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \to (B_1 \vee \cdots \vee B_n)]\!]v = 1$. Voici 5 assertions où la notion de validité est celle relative à l'interprétation dans $\mathbf{3}$. Pour chaque assertion, donnez une preuve ou un contre-exemple. Suggestion: explicitez la notion de validité d'un séquent et l'interprétation de la négation avant de vous engager dans des calculs.

4 *Le séquent $\neg\neg x \vdash x$ est valide.*

SOLUTION *4. Remarques préliminaires.*

- *$A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$ est valide ssi pour toute affectation v, $min([\![A_1]\!]v, \ldots, [\![A_m]\!]v) \leq max([\![B_1]\!]v, \ldots, [\![B_n]\!]v)$.*
- *La négation correspond à la fonction NOT_3 telle que $NOT_3(0) = 1$, $NOT_3(?) = NOT_3(1) = 0$.*

Faux. Si $v(x) =?$ alors $[\![\neg\neg x]\!]v = 1 \not\leq ? = [\![x]\!]v$.

5 *L'axiome (Ax) est valide.*

SOLUTION *5. Vrai. On remarque que $min(x, y) \leq max(x, z)$.*

6 *La règle $(\vee \vdash)$ est valide.*

SOLUTION *6. Vrai. Il faut vérifier que si $min(x, y) \leq z$ et $min(w, y) \leq z$ alors $min(max(x, w), y) \leq z$.*

- *Si $y \leq z$ alors $min(max(x, w), y) \leq y \leq z$.*
- *Si $y \leq w$ alors par hypothèse $y \leq z$ et $min(max(x, w), y) \leq y \leq z$.*
- *Si $z < y$ et $w < y$ alors par hypothèse $x \leq z$ et $w \leq z$ et $min(max(x, w), y) \leq min(z, y) \leq z$.*

7 *La règle $(\vdash \vee)$ est valide.*

SOLUTION *7. Vrai. Dans ce cas l'interprétation de l'hypothèse coïncide avec celle de la conclusion.*

8 *La règle $(\neg \vdash)$ est valide.*

SOLUTION *8. Vrai. On vérifie que si $x \leq max(y, z)$ alors $min(x, NOT_3(y)) \leq z$. Si $y \in \{?, 1\}$ alors $NOT_3(y) = 0$ et on a toujours $min(x, 0) = 0 \leq z$. Si $y = 0$ alors $NOT_3(y) = 1$ et donc il faut montrer $min(x, NOT_3(y)) = x \leq z$ qui est vrai par hypothèse.*

9 *La règle $(\vdash \neg)$ est valide.*

SOLUTION *9. Faux. $min(x, y) \leq z$ n'implique pas toujours que $x \leq max(NOT_3(y), z)$. Si on prend $x = 1$, $y = z =?$ on a que l'hypothèse est vérifiée mais la conclusion ne l'est pas $(1 \not\leq ?)$.*