Contrôle Continu. NOM, Prénom:

Consignes. *Durée 30'. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est interdite. Vos réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1 *On rappelle que: (i) $A \leftrightarrow B$ est une abréviation pour $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ et (ii) $\equiv$ dénote l'équivalence logique. De suite une liste d'assertions, donnez une preuve de celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses.*

1. *Une formule A est valide si et seulement si $\neg A \equiv \mathbf{0}$.*

   SOLUTION *1. Vrai. A valide ssi pour tout $[\![A]\!]v = 1$ ssi pour tout $[\![\neg A]\!]v = 0$ ssi $\neg A \equiv \mathbf{0}$.*

2. *Une formule A est satisfaisable si et seulement si $\neg A \equiv \mathbf{1}$.*

   SOLUTION *2. Faux. Par exemple $\mathbf{0}$ n'est pas satisfaisable mais $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$.*

3. *L'opérateur $\leftrightarrow$ est associatif, à savoir: $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z \equiv x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$*

   SOLUTION *3. Vrai. Vérification avec table de vérité (8 cas). Ou encore plus simple en utilisant 7 on remarque que dans $\mathbf{Z}_2$ on a $(x + y + 1) + z + 1 = x + (y + z + 1) + 1$.*

4. *$\mathbf{0}$ est l'élément neutre pour $\leftrightarrow$, à savoir: $x \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv x$.*

   SOLUTION *4. Faux. Par exemple, $\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$. Plus en général, $x \leftrightarrow \mathbf{0} \equiv \neg x$.*

5. *L'opérateur $\leftrightarrow$ est idempotent, à savoir: $(x \leftrightarrow x) \equiv x$.*

   SOLUTION *5. Faux. On a $x \leftrightarrow x \equiv \mathbf{1}$.*

6. *La formule $x \leftrightarrow y$ définit une fonction $g : \mathbf{2}^2 \to \mathbf{2}$. On peut construire une formule DNF qui définit la fonction g et dont la taille est au plus 10.*

   SOLUTION *6. Vrai. $(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$ définit g est a taille 9.*

7. *Soit g la fonction de l'assertion précedente. On peut construire un polynôme multi-linéaire en deux variables sur $\mathbf{Z}_2$ qui définit la fonction g.*

   SOLUTION *7. Vrai. $((x+1)(y+1) + xy = xy + x + y + 1 + xy = x + y + 1) \mod 2$. On peut remarquer que $(x \leftrightarrow y) \equiv \neg(x \oplus y)$.*

8. *Toute fonction booléenne $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$, $n \geq 1$, est définissable par une formule qui utilise les opérateurs $\mathbf{0}$, $\leftrightarrow$ et $\wedge$ et n variables $x_1, \ldots, x_n$.*

   SOLUTION *8. Vrai. $\neg A \equiv (A \leftrightarrow \mathbf{0})$ et on sait qu'avec $\wedge$ et $\neg$ on peut définir toutes les fonctions.*

9. *Toute fonction $f : \mathbf{2}^n \to \mathbf{2}$, $n \geq 1$ est définissable par une formule qui utilise les opérateurs $\mathbf{1}$, $\leftrightarrow$ et $\wedge$ et n variables $x_1, \ldots, x_n$.*

   SOLUTION *9. Faux. Les seules fonctions unaires qu'on peut définir sont la fonction identité et la fonctions constante 1. En effet:*

$$\begin{array}{ll} (x \leftrightarrow x) \equiv (\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1} & (x \leftrightarrow \mathbf{1}) \equiv (\mathbf{1} \leftrightarrow x) \equiv x \\ (\mathbf{1} \wedge \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1} & (x \wedge x) \equiv (x \wedge \mathbf{1}) \equiv (\mathbf{1} \wedge x) \equiv x \ . \end{array}$$