Durée : 20 minutes. Aucun document n'est autorisé !

Nom and prénom : ______________________________

Numero étudiant.e : ______________________________

Exercice 1. Utilisez la méthode de résolution pour prouver que la formule $x \wedge p \wedge q$ est une consequence logique de la formule $(\neg x \to y) \wedge (y \to x) \wedge (x \to p \wedge q)$.

Pour prover que $A = (\neg x \to y) \wedge (y \to x) \wedge (x \to p \wedge q)$ implique $B = x \wedge p \wedge q$ ont étude la satisfiabilité de sa negation : $A \wedge \neg B$. Cette dernière formule, par équivalence logique, se réduit à l'ensemble des clauses suivantes :

$$C_1 = \{x, y\} \qquad C_2 = \{\neg y, x\} \qquad C_3 = \{\neg x, p\} \qquad C_4 = \{\neg x, q\} \qquad C_5 = \{\neg x, \neg p, \neg q\}$$

Par résolution sur p on obtient :

$$C_1, C_2, C_4, \{\neg x, \neg q\},$$

Par résolution sur q on obtient :

$$C_1, C_2, \{\neg x\},$$

Par singleton $x = 0$, on obtient donc :

$$\{y\}, \{\neg y\}$$

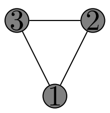
Par singleton $y = 1$, on obtient donc la clause vide $\{\,\}$. Ceci implique que $A \wedge \neg B$ n'est pas satisfaisable, donc B est bien une consequence logique de A.

Exercice 2. Soit $G = (N, A)$ un graphe non-dirigé fini. Écrivez une formule A_G du calcul propositionnel en CNF qui est satisfiable ssi le graphe G est 2-coloriable.

Pour chaque sommet $s \in N$ et couleur $c \in \{r, n\}$ on considère la variable $x_{s,c}$. Un coloriage des sommets de G corresponde à une affectation de ces variables, selon la regle : $x_{s,c} = 1$ ssi le sommet s a la couleur c.
La formule A_G est la conjunction des CNF suivantes :

- chaque sommet a au moins une couleur : $\bigwedge_{s \in N} (x_{s,r} \vee x_{s,n})$
- chaque sommet a au plus une couleur : $\bigwedge_{s \in N} (\neg x_{s,r} \vee \neg x_{s,n})$
- chaque arête a les deux extrémités de couleur différente : $\bigwedge_{\{s,s'\} \in A} (\neg x_{s,r} \vee \neg x_{s',r}) \wedge (\neg x_{s,n} \vee \neg x_{s',n})$

Exercice 3. Pour chaque graphe G suivant, analysez la satisfiabilité de A_G du exercice précédent en utilisant la méthode DP. Si la formule est satisfiable en déduire la 2-coloration correspondante.



A est l'ensemble des clauses suivantes :

$C_1 = \{x_{1,r}, x_{1,n}\}, C_2 = \{x_{2,r}, x_{2,n}\}, C_3 = \{x_{3,r}, x_{3,n}\}, C_4 = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{1,n}\},$

$C_5 = \{\neg x_{2,r}, \neg x_{2,n}\}, C_6 = \{\neg x_{3,r}, \neg x_{3,n}\}, C_7 = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{2,r}\}, C_8 = \{\neg x_{1,n}, \neg x_{2,n}\},$

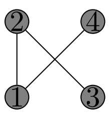
$C_9 = \{\neg x_{2,r}, \neg x_{3,r}\}, C_{10} = \{\neg x_{2,n}, \neg x_{3,n}\}, C_{11} = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{3,r}\}, C_{12} = \{\neg x_{1,n}, \neg x_{3,n}\}$

$$A[1/x_{1,r}] = C_2, C_3, \{, \neg x_{1,n}\}, C_5, C_6, \{\neg x_{2,r}\}, C_8, C_9, C_{10}, \{\neg x_{3,r}\}, C_{12}$$

Par singleton, $x_{1,n} = x_{2,r} = x_{3,r} = 0$, donc on obtient $\{x_{2,n}\}, \{x_{3,n}\}, C_{10}$.
Par singleton, $x_{2,n} = x_{3,n} = 0$ et de C_10 nous obtenons la clause vide. Donc $A[1/x_{1,r}]$ n'est pas satisfiable. On analyse maintenant :

$$A[0/x_{1,r}] = \{x_{1,n}\}, C_2, C_3, C_5, C_6, C_8, C_9, C_{10}, C_{12}$$

Par singleton, $x_{1,n} = 1$, donc on obtient $C_2, C_3, C_5, C_6, \{\neg x_{2,n}\}, C_9, C_{10}, \{\neg x_{3,n}\}$
Par singleton, $x_{2,n} = x_{3,n} = 0$, donc on obtient $\{x_{2,r}\}, \{x_{3,r}\}, C_9$
Par singleton, $x_{2,r} = x_{3,r} = 1$, donc on obtient la clause vide de C_9, donc $A[0/x_{1,r}]$ n'est pas satisfiable. On conclue que A n'est pas satisfiable et donc le graphe n'est pas 2-colorable.



A est l'ensemble des clauses suivantes :

$C_1 = \{x_{1,r}, x_{1,n}\}, C_2 = \{x_{2,r}, x_{2,n}\}, C_3 = \{x_{3,r}, x_{3,n}\}, C_4 = \{x_{4,r}, x_{4,n}\},$

$C_5 = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{1,n}\}, C_6 = \{\neg x_{2,r}, \neg x_{2,n}\}, C_7 = \{\neg x_{3,r}, \neg x_{3,n}\}, C_8 = \{\neg x_{4,r}, \neg x_{4,n}\},$

$C_9 = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{2,r}\}, C_{10} = \{\neg x_{1,n}, \neg x_{2,n}\}, C_{11} = \{\neg x_{2,r}, \neg x_{3,r}\},$

$C_{12} = \{\neg x_{2,n}, \neg x_{3,n}\}, C_{13} = \{\neg x_{1,r}, \neg x_{4,r}\}, C_{14} = \{\neg x_{1,n}, \neg x_{4,n}\}$

$$A[1/x_{1,r}] = C_2, C_3, C_4, \{\neg x_{1,n}\}, C_6, C_7, C_8, \{\neg x_{2,r}\}, C_{10}, C_{11}, C_{12}, \{\neg x_{4,r}\}, C_{14}$$

Par singleton $x_{1,n} = x_{2,r} = x_{4,r} = 0$, donc on obtient $\{x_{2,n}\}, C_3, \{x_{4,n}\}, C_7, C_{12}$
Par singleton $x_{2,n} = x_{4,n} = 1$, donc on obtient $C_3, C_7, \{\neg x_{3,n}\}$
Par singleton $x_{3,n} = 0$, donc obtient $\{x_{3,r}\}$, ce qui donne, avec $x_{3,r} = 1$, l'ensemble vide de clauses. Donc A est satisfiable, ce qui donne la coloration : $1 \mapsto r$, $2 \mapsto n$, $3 \mapsto r$, $4 \mapsto n$.