

Durée : 15 minutes.
Aucun document n'est autorisé !

Nom and prénom : _____

Numero étudiant.e : _____

Exercice 1. On considère le connecteur binaire $\otimes$ dont la table de vérité est

x	y	$(x \otimes y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Démontrer ou réfuter chacune des trois affirmations suivantes (où $x, y, z \in V$) :

I. $((x \otimes y) \otimes z) \equiv (x \otimes (y \otimes z))$

L'équivalence logique n'est pas valide, en effet l'affectation $x \mapsto 0, y \mapsto 1, z \mapsto 0$ satisfait la formule à droite mais pas la formule à gauche.

II. $(z \wedge \neg z) \equiv (z \otimes z)$

L'équivalence logique n'est pas valide, en effet la formule à gauche est une contradiction alors que la formule à droite est une tautologie.

III. $(x \wedge y) \models (x \otimes y)$

La consequence logique est correcte : en effet, la formule à gauche est vrai seulement si $x \mapsto 1$ et $y \mapsto 1$, et, dans ce cas, la formule à droite est satisfaite.

Exercice 2. En considérant le connecteur $\otimes$ de la question précédente, donner une formule A telle que $A \equiv x \otimes y$, où les seuls connecteurs de A soient $\neg$ et $\vee$.

$$\neg x \vee y$$

Exercice 3. Pour chacune des formules suivantes dire si elle est valide ou pas. Si vous pensez qu'une formule est valide donner une preuve en calcul des séquents, si vous pensez qu'une formule n'est pas valide donner une affectation qui ne satisfait pas la formule (où $x, y \in V$) :

I. $x \vee (\neg x \wedge \neg y)$

Pas valide, en effet l'affectation $x \mapsto 0, y \mapsto 1$ ne satisfait pas la formule.

II. $(\neg x \vee (\neg(\neg x \vee y))) \vee (x \wedge y)$

$$\begin{array}{c}
 \frac{x \vdash x, y}{\neg x, x \vdash y} \quad \frac{y, x \vdash y}{\neg x \vee y, x \vdash y} \\
 \frac{\neg x \vee y, x \vdash x}{\neg x \vee y, x \vdash (x \wedge y)} \quad \frac{\neg x \vee y, x \vdash \neg x, (x \wedge y)}{\vdash \neg x, \neg(\neg x \vee y), (x \wedge y)} \\
 \frac{\vdash \neg x, \neg(\neg x \vee y), (x \wedge y)}{\vdash (\neg x \vee (\neg(\neg x \vee y))), (x \wedge y)} \\
 \frac{\vdash (\neg x \vee (\neg(\neg x \vee y))), (x \wedge y)}{\vdash (\neg x \vee (\neg(\neg x \vee y))) \vee (x \wedge y)}
 \end{array}$$

Exercice 4. Pour chacune des formules suivantes donner une formule en forme normale conjunctive (CNF) équivalente et de taille minimale parmi les CNF équivalentes.

I. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

$$(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$$

II. $(B \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow A))$

La formule est fausse seulement pour $A \mapsto 0, C, B \mapsto 1$. Donc la CNF suivante est logiquement équivalente à la formule ci-dessus :

$$A \vee \neg B \vee \neg C$$