Outils Logiques - 2018-2019, Examen Session 1

Consignes *Durée: 3h. L'utilisation de tout document ou dispositif électronique est* **interdite**. *Toute réponse doit être* **justifiée** *(les réponses sans justification ne sont pas évaluées). Le* **barème** *est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 (terminaison) [4 pnt] *Soient* $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *l'ensemble des nombres naturels et* $\mathbf{N}^*$ *l'ensemble des mots finis sur* $\mathbf{N}$. *Si* $n, m \in \mathbf{N}$ *alors on dénote par* $(n)^m$ *le mot sur* $\mathbf{N}^*$ *qui contient* m *fois le nombre* n. *Par exemple,* $(9)^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$. *On définit une relation binaire* $\rightarrow$ *sur* $\mathbf{N}^*$ *par:*

$$\rightarrow = \{(\alpha \cdot (n+1) \cdot \beta,\ \alpha \cdot (n)^{(n+1)} \cdot \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{N}^*, n \in \mathbf{N}\} .$$

En d'autres termes, on peut prendre un nombre positif $(n+1)$ *dans le mot et le remplacer par* $n+1$ *occurrences du nombre* n. *Par exemple, on a* $(3 \cdot 2 \cdot 4,\ 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4) \in \rightarrow$. *On écrira aussi* $\alpha \rightarrow \beta$ *pour dire* $(\alpha, \beta) \in \rightarrow$.

1. *La relation* $\rightarrow$ *est-elle transitive?*

2. *Soit* $\mathbf{N}^2$ *le produit cartésien* $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *et pour* $k > 2$ *soit* $\mathbf{N}^k = \mathbf{N}^{k-1} \times \mathbf{N}$. *Rappelez la définition de l'ordre lexicographique sur* $\mathbf{N}^k$ *pour* $k = 2$ *et expliquez comment généraliser la définition pour* $k > 2$.

3. *Supposons que* $\alpha_0 \in \mathbf{N}^*$ *est un mot constitué de nombres inférieurs à 5. Est-ce possible de trouver une suite infinie* $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots$ *?*

4. *Le système de réécriture* $(\mathbf{N}^*, \rightarrow)$ *termine-t-il?*

Exercice 2 (calcul des séquents) [3 pnt] *Prouvez les séquents suivants dans le calcul des séquents de Gentzen (les formules* A, B, C *sont arbitraires). Pour ce faire vous pouvez soit appliquer les règles d'inférence pour l'implication, soit exprimer d'abord l'implication en fonction de la disjonction et de la négation.*

1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$.

2. $\vdash (A \vee B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$.

3. $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \vdash (A \vee B) \rightarrow C$.

Exercice 3 (résolution) [3 pnt] *Considérons la formule* A *définie comme suit:*

$$((x \vee y) \rightarrow w) \wedge (w \rightarrow (\neg x \wedge z)) \wedge \neg(z \wedge y)$$

1. *Donnez une CNF équivalente à* A.

Ensuite, pour chacune des formules suivantes, déterminez si elle est une conséquence logique de A *en utilisant la méthode de résolution:*

2. $\neg w \wedge \neg y$,

3. $w \wedge y$.

Exercice 4 (BDD) [4 pnt] *On considère des formules booléennes sur l'ensemble des variables* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *pour* $n \geq 1$.

1. *Donnez un BDD réduit pour la fonction* $f_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, *où* $x_1 \oplus x_2 = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$.

2. *Généralisez au cas de la fonction* $f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$, *en considérant l'ordre* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. *Quelle est précisément la taille du BDD réduit obtenu en fonction de* n*? Existe-t-il un ordre entre les variables de* V *pour lequel le BDD réduit qui représente la fonction* f_n *est de taille exponentielle en* n *? Justifiez la réponse.*

3. *Considérons l'ensemble de variables* $V' = V \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$, *et soit* h *la fonction*

$$h(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \oplus y_1) \wedge (x_2 \oplus y_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \oplus y_n)$$

Donnez un BDD pour h *de taille polynomiale en* n *en précisant l'ordre considéré sur les variables de* V'. *Trouvez un ordre entre les variables de* V' *pour lequel le BDD réduit pour* h *est de taille exponentielle en* n *et esquissez la structure du BDD réduit.*

Exercice 5 (CNF, méthode DP, graphes) [6,5 pnt] *Dans cet exercice, nous considérons des formules en forme normale conjonctive (CNF), écrites en utilisant la notation ensembliste. Une affectation* v *satisfait une CNF* A *si pour toute clause* $C \in A$ *il existe un littéral* $\ell \in C$ *tel que* $[\![\ell]\!]v = 1$. *Dans ce cas on dit que* A *est satisfaisable. On dit aussi qu'une affectation* v *01-satisfait une CNF* A *si pour toute clause* $C \in A$ *ils existent deux littéraux* $\ell, \ell' \in C$ *tels que* $[\![\ell]\!]v = 1$ *et* $[\![\ell']\!]v = 0$. *Et dans ce cas on dit que* A *est 01-satisfaisable.*

1. *Soit* $A = \{\{x_1, \neg x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$. *Donnez une affectation* v_1 *qui satisfait* A *mais qui ne 01-satisfait pas* A, *et une affectation* v_2 *qui 01-satisfait* A.

2. *Soit* A *une CNF. Peut-il exister une affectation* v *qui 01-satisfait* A *et qui ne satisfait pas* A*?*

3. *Montrez que* $A = \{\{x_1, x_2\}, \{\neg x_1, \neg x_2\}, \{x_1, \neg x_2\}\}$ *est satisfaisable mais qu'elle n'est pas 01-satisfaisable.*

Si C *est une clause soit* $\overline{C} = \{\neg \ell \mid \ell \in C\}$ *qui est aussi une clause. Si* A *est une CNF, soit* $\overline{A} = \{\overline{C} \mid C \in A\}$ *qui est aussi une CNF.*

4. *Soit* A *une CNF, et soit* A' *la CNF définie par* $A' = A \cup \overline{A}$. *Montrez que* A' *est satisfaisable si et seulement si* A *est 01-satisfaisable. Donnez une borne supérieure à la taille de* A' *en fonction de la taille de* A.

5. *Appliquez l'algorithme DP (Davis-Putnam) à la formule* $A' = A \cup \overline{A}$, *où* A *est la formule du point [1.] ci-dessus.*

On rappelle qu'un graphe non-dirigé est biparti si l'ensemble N *des noeuds peut être partitionné en deux ensembles* N_0 *et* N_1 *tels que* $N = N_0 \cup N_1$, $N_0 \cap N_1 = \emptyset$ *et toutes les arêtes du graphe connectent un noeud dans* N_0 *avec un noeud dans* N_1. *Soit* A *une 2-CNF, c.à.d. une CNF dont toutes les clauses possèdent exactement deux littéraux. On associe à* A *un graphe non-dirigé* G_A *dont les noeuds sont les littéraux qui apparaissent dans* A *et les arêtes sont construites d'après les deux règles suivantes: (i) si* $\{\ell, \ell'\}$ *est une clause dans la 2-CNF* A *alors* $\{\ell, \ell'\}$ *est une arête et (ii) si un littéral* ℓ *et sa négation* $\neg\ell$ *paraissent dans la 2-CNF* A *alors* $\{\ell, \neg\ell\}$ *est une arête.*

6. *Dessinez* G_A *pour la CNF* A *donnée au point [3.] ci-dessus.*

7. *Montrez qu'une formule 2-CNF* A *est 01-satisfaisable si et seulement si* G_A *est biparti.*