Université Paris Diderot – L3 Informatique 21 Juin 2018

Outils Logiques – Examen de Rattrapage (durée : 3 h)

Documents autorisés : seulement deux feuilles A4 manuscrites et strictement personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

RÉDIGER L'EXERCICE 1 DANS UNE FEUILLE INDÉPENDANTE

Semantique

Exercice 1 Étant donnés deux nombres naturels k et n tels que $k \leq n$, on considère le connecteur n-aire $\mathtt{atleast}_k^n$ défini *informellement* comme suit :

$\mathtt{atleast}_k^n(p_1, \ldots, p_n)$ est vrai si et seulement si au moins k parmi ses n arguments sont vrais

La définition *formelle* de la sémantique de $\mathtt{atleast}_k^n$ est la suivante :

$$[\![\mathtt{atleast}_k^n(p_1, \ldots, p_n)]\!]v = \begin{cases} 1 & \text{si } |\{i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tels que } [\![p_i]\!]v = 1\}| \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $|A|$ désigne la cardinalité de l'ensemble A, et $p_1, \ldots, , p_n$ désignent des formules du calcul propositionnel.

Remarquez qu'il existe autant de connecteurs $\mathtt{atleast}_k^n$ que de choix possibles de k et de n tels que $k \leq n$, et que ces connecteurs sont tous différents entre eux.

Dans les questions ci-dessous x, y, z, t désignent des variables propositionnelles.

1. Écrire la table de vérité de $\mathtt{atleast}_2^3(x, y, z)$.
2. Démontrer ou réfuter chacune des affirmations suivantes (il n'est pas forcement nécessaire de produire à chaque fois l'integralité des tables de vérité des formules concernées) :
   (a) $\mathtt{atleast}_2^4(x, y, z, t) \models ((x \wedge y) \vee (z \wedge t))$
   (b) $((x \vee y) \wedge (y \vee z)) \models \mathtt{atleast}_2^3(x, y, z)$
   (c) $\mathtt{atleast}_1^3(\mathtt{atleast}_2^2(x, y), \mathtt{atleast}_2^2(x, z), \mathtt{atleast}_2^2(x, t)) \models\!\mid (x \wedge (y \vee (z \vee t)))$
3. Donner une formule p telle que $p \models\!\mid \mathtt{atleast}_2^3(x, y, z)$, où les seuls connecteurs de p soient $\wedge$ et $\vee$.
4. Donner une formule q telle que $q \models\!\mid (x \vee y)$, où les seul connecteur de q soit $\mathtt{atleast}_1^2$, et une formule r telle que $r \models\!\mid (x \wedge y)$, où les seul connecteur de r soit $\mathtt{atleast}_2^2$.
5. Est-ce que l'ensemble de connecteurs $\{\mathtt{atleast}_1^2, \mathtt{atleast}_2^2\}$ est complet ? (justifier votre reponse).

Scanned by CamScanner

FNC **Exercice 2** Soit $p \in \mathsf{Form}$ une formule de la logique propositionnelle. On désigne par

- $A(p)$ le nombre de variables de p, en comptant les éventuelles répétitions de variables. Ainsi par exemple $A((y \vee (y \wedge \neg x))) = 3$.
- $B(p)$ le nombre de symboles "(", ")", "$\wedge$", "$\vee$" ou "$\neg$" de p. Ainsi par exemple $B((y \vee (y \wedge \neg x))) = 7$.
- $C(p)$ la taille de p, c'est à dire le nombre total de symboles de p. Ainsi par exemple $C((y \vee (y \wedge \neg x))) = 10$.

Questions :

1. Soit $p_0 = \neg((x \wedge (y \wedge \neg z)) \vee \neg(x \wedge y))$. Calculer $A(p_0)$, $B(p_0)$ et $C(p_0)$.
2. Donner une définition récursive de A, B et C.
3. Démontrer par induction structurelle que $A(p) + B(p) = C(p)$ pour tout $p \in \mathsf{Form}$.

Modélisation **Exercice 3** Dans le pays Xaguhun il y a $I_1, \ldots, I_n$ ($n \geq 1$) inspecteurs des impôts qui doivent contrôler $P_1, \ldots, P_k$ ($k \geq 1$) provinces.

On cherche à établir un planning qui précise quelle personne inspecte quelle province. A priori, un inspecteur peut être envoyé sur zéro, une ou plusieurs provinces, et une province peut être visitée par zéro, un ou plusieurs inspecteurs.

1. Définir l'ensemble de variables propositionnelles qui permet de modéliser le problème. Expliquer brièvement la signification de chaque variable
2. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC le fait que chaque inspecteur doit être envoyé à au moins une province.
3. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC le fait que chaque province doit être contrôlée par au moins un inspecteur.
4. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC qu'aucun inspecteur ne peut contrôler deux provinces à la fois.
5. Les inspecteurs I_3 et I_9 ne s'aiment pas. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC que ces deux inspecteurs ne peuvent pas être envoyés à la même province pour travailler ensemble.
6. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC que chaque province est contrôlée par au plus 5 inspecteurs.
7. Exprimer par une formule propositionnelle en FNC que chaque inspecteur contrôle au moins 3 provinces.

Scanned by CamScanner